CÁLCULOS

8

En los trabajos de topografía se efectúan cálculos para procesamiento de información, de comprobación y ajustes. Los datos obtenidos en el campo son resultados de procesos de medición de ángulos y distancias, estos datos se emplean para determinar coordenadas que son el primer paso para procesos numéricos posteriores como cálculo de áreas, trabajos de particiones, generación de sistemas de información, entre otros.

8.1 Cálculo de proyecciones

Para el cálculo de coordenadas cartesianas a partir de los datos obtenidos en campo, previamente se calculan las proyecciones (referidas a los ejes coordenados) de los lados de una línea poligonal, sea esta cerrada o abierta.

Proyección meridiano

El valor de la proyección meridiano (PM) de un vector de poligonal se calcula así:

$$PM = D\cos Az$$

Proyección paralelo

El valor de la proyección paralelo (PP) de un vector de poligonal se calcula así:

$$PP = D\ senAz$$

8.2 Cálculos de comprobación

8.2.1 Cierre angular

Como ya sabemos en las poligonales los elementos a medir son ángulos y distancias por tal motivo la precisión de estas se ve afectada por los errores accidentales que se presentan en la medición de esas magnitudes, debido a innumerables causas. En el caso de los ángulos podemos encontrar la discrepancia existente ya sea para las poligonales cerradas comparando la sumatoria de los ángulos internos o externos medidos con la condición geométrica **(n – 2) x 180º = ∑ Internos** y (n + 2) x 180º = ∑ Externos, o en poligonales abiertas con control total se logra obtener el error de cierre comparando el azimut de llegada con el azimut teórico.

Para las poligonales podemos establecer unas especificaciones de medida de la siguiente forma:

1. Para el caso de levantamiento que no exigen una precisión muy elevada se puede decir que la precisión esta dado por la multiplicación de la precisión angular del transito y el numero de vértices de la poligonal. Tenemos entonces:

$$E\ ang < an$$

2. Para el caso de levantamiento de precisión se puede establecer que la precisión esta dada por la multiplicación de la precisión angular del instrumento y la raíz cuadrada del numero de vértices

$$E\ ang < a(n)^{1/2}$$

Las especificaciones anteriormente descritas nos permiten determinar si el trabajo cumple o no con las condiciones de precisión angular

Ejemplo:

En un levantamiento que no requiere una gran precisión, se obtuvo un error de cierre angular es de 00º 03`empleando la primera formula vista se puede establecer si el trabajo cumple con la exigencia ***an***; donde el a = 10``, n = 7 y *E ang* = 00º02'.

$an = 10''(7) =$ 00º 01'10''

$E\ ang < an \Rightarrow$ 00º 02'> 00º 01'10''

En el resultado anterior se ve que el error angular es mayor y por lo tanto trabajo realizado no cumple la condición. Se puede inferir que se ha cometido un error grande (equivocación) y es necesario rectificar los ángulos medidos.

Si en el caso anterior el error de cierre angular fuera de 00º01'00'' y la especificación la misma 00º01`10`` entonces:

$E\ ang < an \Rightarrow$ 00º 01'< 00º 01'10''

Es porque el trabajo esta dentro de las especificaciones y se continua al paso siguiente.

8.2.2 Error de cierre

Es la discrepancia de posición determinada por las coordenadas de dos puntos, ya sea para el caso de una poligonal cerrada el punto de partida y llegada o el punto de llegada y el punto de coordenadas conocidas en una poligonal abierta.

En toda poligonal cerrada sobre si misma o cerrada entre puntos de control de posición conocida (amarrada), se debe cumplir que:

La sumatoria algebraica de las componentes (las dos proyecciones) de la línea que va del primer punto al último debe ser igual a la suma algebraica de las diferencias entre las coordenadas sobre los respectivos ejes, es decir:

En tal caso el error de cierre es igual a la hipotenusa del triangulo que forman los segmentos dirigidos δNS y δEW, *(fig. 1)*.

Si utilizamos para el cálculo el δNS y δEW la formula a emplear es la siguiente:

$$Ec = \sqrt{\delta NS^2 - \delta EW^2}$$

Si utilizamos las coordenadas del punto uno y las de punto uno prima, la formula es:

$$Ec = \sqrt{\{N(1) - N(1')\}^2 + \{E(1) - E(1')\}^2}$$

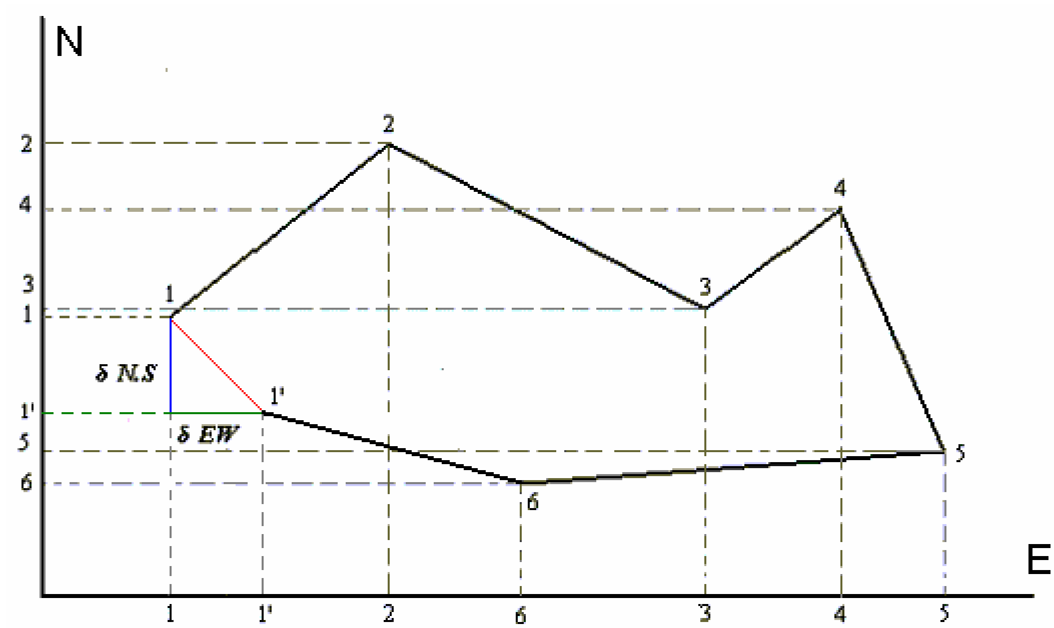


Figura 1

$$Ec = \sqrt{\{PM(1,1')\}^2 + \{PP(1,1')\}^2}$$

En el caso de un poligonal cerrada sobre si misma, 1 = 1' => la diferencia es 0

En la práctica los dos valores no son iguales por los errores inherentes a las medidas, pero su valor debe ser inferior a la tolerancia permitida.

La dirección de la línea de cierre se determina por la fórmula:

θ = arc tan (PP / PM)

En el trabajo de poligonales abiertas la diferencia del ΔN y la sumatoria de PM's es igual cero, lo mismo que la diferencia de ΔE y la sumatoria de PP's.

$$\delta\ NS = \Delta N - \sum PM = 0$$

$$\delta\ SW = \Delta E - \sum PP = 0$$

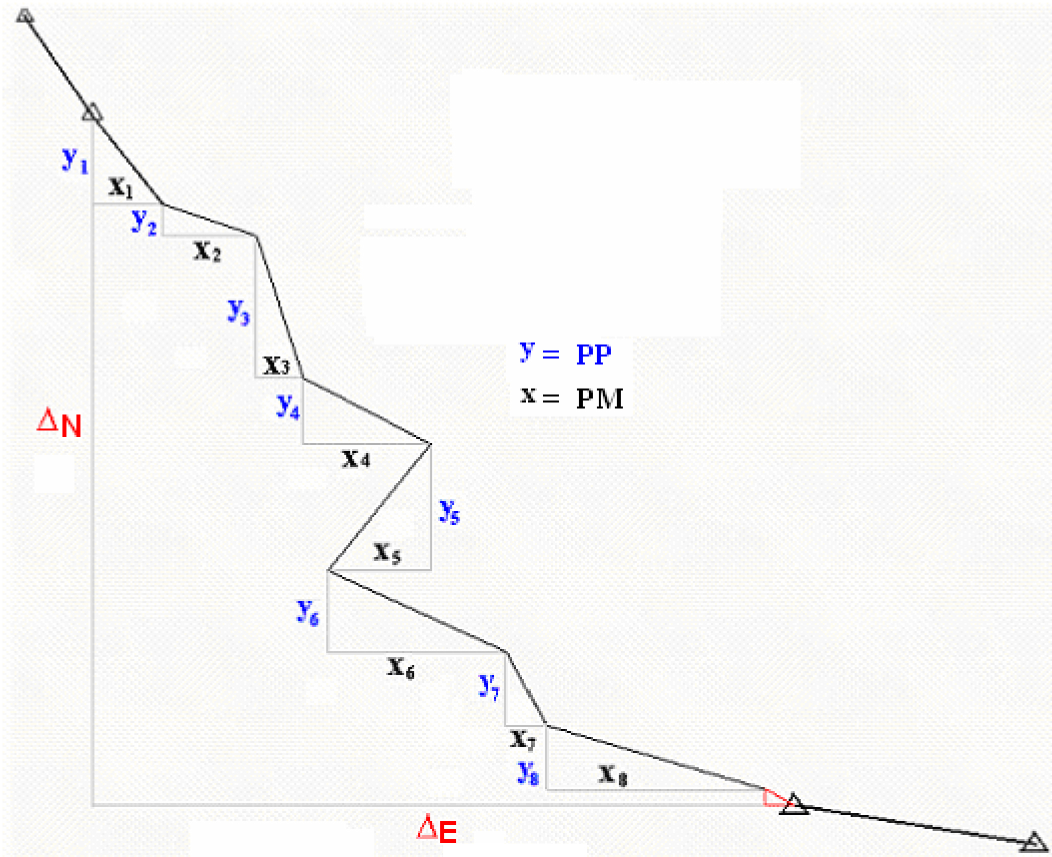


Figura 2

8.2.3 Precisión en poligonales

Los errores de cierre angular y lineal (o posicional) solo los causan errores aleatorios, en las mediciones después de que se ha eliminado todos los errores sistemáticos significativos; estos errores de cierre son, entonces, proporcionales a los respectivos errores estándar Emc_A y Emc_D de las medidas.

Respecto a los errores de cierre en poligonales cerradas, los errores estándar en mediciones angulares y de distancias se pueden expresar en la forma $Emc_A = E\sqrt{n}$ y $Emc_D = E\sqrt{n}$ donde n es el número de vértices claro que en la practica, para el caso del error de cierre lineal esta más ligado en la longitud de la poligonal.

8.3 MÉTODOS DE AJUSTE

Ya que entendemos el error del cierre lineal (vector entre las coordenadas definitivas y las provisionales). Y que tenemos el criterio anteriormente visto para el cierre angular pedemos pensar en el ajuste de las poligonales, el cual podemos efectuar por diversos métodos, entre los mas conocidos.

- Brújula
- Transito
- Crandall
- XY (Ormsby)

8.3.1 Método de la brújula

Consiste en asegurar que se cumpla la condición de cierre de poligonales. Y para esto se basa en que los errores n los levantamientos son accidentales y varían con la raíz cuadrada de la longitud de los lados directamente por lo que se aplican correcciones proporcionales a la longitud de los lados del polígono y que los errores angulares tienen efectos semejantes a los de las medidas lineales.
Este método lo aplicamos cuando creamos que los errores presentes son tanto en el ángulo como en la distancia, ya que este método cambia las proyecciones de tal modo que la azimut y las distancias son cambiadas.

Las formulas aplicadas para obtener la corrección de proyecciones son las siguientes:

$$C_{PM} = \left(\frac{\delta\ PM}{L} \right) \times DH$$

$$C_{PP} = \left(\frac{\delta\ PP}{L} \right) \times DH$$

Las correcciones se aplican así:

$$PMC = PM - C_{PM}$$

$$PPC = PP - C_{PP}$$

8.3.2 Método del transito

Este método lo empleamos cuando pensamos que los posibles errores presentes en el trabajo de campo están en distancia, ya que el método se corrige proporcionalmente a las proyecciones N y E de tal forma que la longitud de los lados de la poligonal cambia ligeramente, pero las Azimut permanecen prácticamente iguales.
También al igual que el Método de la Brújula se basa en que los errores en los levantamientos son accidentales, pero en este se asume que las medidas angulares son más precisas que las lineales.

Las formulas a aplicar son las siguientes:

$$C_{PM} = \left(\frac{\delta\ PM}{\sum |PM|} \right) \times PM$$

$$C_{PP} = \left(\frac{\delta\ PP}{\sum |PP|} \right) \times PP$$

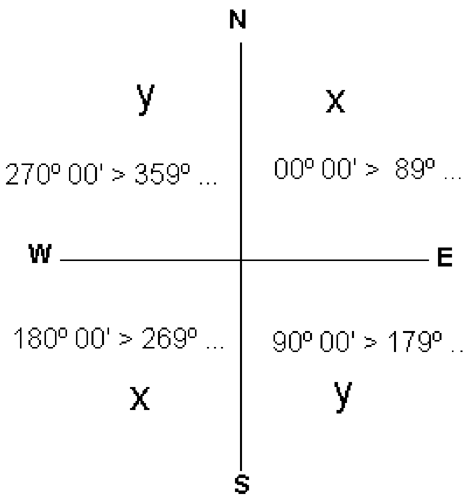
Las correcciones se aplican así:

$$PMC = |PM_i| - C_{PM}$$

$$PPC = |PP_i| - C_{PP}$$

Nota: En algunas ocasiones, puede ser necesario cambiar ligeramente alguna de las correcciones, para cumplir que la sumatoria de corrección en PM y la sumatoria de las correcciones PP deben ser iguales al error en PM o N y el error en PP o E respectivamente, pero esto es debido a que se trabaja con el redondeo a cifras significativas. Generalmente estos cambios se realizan a los valores más grandes.

8.3.3 Método X Y (Ormsby)



A este método se le conoce como método Ormsby, y actúa sobre las distancias sin modificar los ángulos, al igual que el método del transito.

El método consiste en asignarle una letra a cada lado de la poligonal de acuerdo con su orientación o dicho de otra forma dependiendo del cuadrante en que se encuentre.

X: cuadrante NE y SW, direcciones 0° y 180°.

Y: cuadrante SE y NW, direcciones 90° y 270°.

Luego de asignarle la letra a cada lado de la poligonal y teniendo la PM y las PP, realizamos la sumatoria en valor absoluto de los términos en x e y de cada una de las proyecciones, obteniendo así una sumatoria de las PM en x (ΣPMx), una sumatoria de las PM en y (ΣPMy), una sumatoria de las PP en x (ΣPPx) y una sumatoria de las PP en y (ΣPPy).

El paso siguiente es el de armar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (x e y) donde los términos independientes son δPM y δPP. La forma de armar estos sistemas de ecuaciones es el siguiente:

a) Tomo los términos independientes de las ecuaciones en calor absoluto |δPM| , |δPP| y se observa cual es el termino de mayor valor a la ecuación que posee este termino la llamo primaria y el signo del termino independiente me define los signos de los otros términos de esa ecuación; a la otra la llamo secundaria y mantengo para los términos en X el signo del termino independiente de la ecuación primaria, que se cambia para los valores de Y.

Por lo tanto existen dos casos:

1. $|\delta PM| > |\delta PP|$

$$\delta PM > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum PMx + \sum PMy = \delta PM \\ \sum PPx - \sum PPy = \delta PP \end{cases}$$

$$\delta PM < 0 \Rightarrow \begin{cases} -\sum PMx - \sum PMy = -\delta PM \\ -\sum PPx - \sum PPy = \delta PP \end{cases}$$

2. $\left|\delta\, PM\right| < \left|\delta\, PP\right|$

$$\delta\, PP > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum PPx + \sum PPy = \delta\, PP \\ \sum PMx - \sum PMy = \delta\, PM \end{cases}$$

$$\delta\, PP < 0 \Rightarrow \begin{cases} -\sum PPx - \sum PPy = -\delta\, PP \\ -\sum PMx + \sum PMy = \delta\, PM \end{cases}$$

Ya teniendo el sistema de dos ecuaciones lo resolvemos para obtener los coeficientes de *x* e *y.*

Teniendo los coeficientes de x e y podemos calcular las correcciones de PM y PP aplicando las siguientes formulas:

$Cx = |P|.x$ Cx = corrección de términos en x

$Cy = |P|.y$ Cy = corrección de términos en y

P = proyección meridiana o paralela en valor absoluto

Es muy importante darle a cada corrección el signo que le toca de acuerdo con el origen (en las formulas) que pueden ser PM y PP y de acuerdo con la letra que le corresponde por lado a que pertenece.

Por ultimo para obtener las proyecciones corregidas aplicamos lo siguiente:

$$PMC = PM - CPM$$
$$PPC = PP - CPP$$

Un chequeo que se puede realizar para determinar si el proceso esta bien hecho es que la sumatoria algebraica de las proyecciones corregidas en PM y PP son igual a cero.

8.3.4 Método de Crandall

Este permite realizar el ajuste de las longitudes de la poligonal sin alterar sus azimuts. Esta basado en la teoría de mínimos cuadrados.

Veamos los pasos para realizar un ajuste por dicho método:

1. se calculan las proyecciones (PM , PP)
2. se obtiene los valores de L^2 , D^2 , LD , para cada una de las proyecciones, con las siguientes formulas:

$$L^2 = \frac{PM^2}{DH} \qquad D^2 = \frac{PP^2}{DH} \qquad LD = \frac{PP \times PM}{DH}$$

3. se efectúa la sumatoria de cada uno de los elementos anteriormente calculados, ($\sum L^2$, $\sum D^2$, $\sum$ LD).

4. Determinamos el valor de A y B por medio de las formulas que aparecen a continuación:

$$A = \frac{\delta\, PP\left(\sum LD\right) - \delta\, PM\left(\sum D^2\right)}{\left(\sum L^2 \sum D^2\right) - \left(\sum LD\right)^2}$$

$$B = \frac{\delta\, PM\left(\sum LD\right) - \delta\, PP\left(\sum L^2\right)}{\left(\sum L^2 \sum D^2\right) - \left(\sum LD\right)^2}$$

5. calculamos el valor de las correcciones, reemplazando los valores obtenidos en el numeral 2 y 4 en las siguientes formulas:

$$C_{PM} = A.L^2 + B.LD$$

$$C_{PP} = A.LD + B.D^2$$

6. las proyecciones corregidas las determinamos con:

$$PPc = PP + C_{PP}$$

$$PMc = PM + C_{PM}$$

Los métodos de Tránsito, Brújula y Crandall se pueden aplicar al hacer los cálculos utilizando los programas de cálculos topográficos conocidos en el mercado actual.

Ejemplo: teniendo la siguiente cartera de poligonal realizar el ajuste por los métodos, brújula, transito, XY.

Est	Ang. Hor.	Dist. Hor.	PM	PP	N	E
P1					1000.00	1000.00
P2	224º 23’	94.52	-67.57	-66.09	932.43	933.91
P3	166º 52’	95.92	-93.41	21.79	839.02	955.70
P4	140º 40’	84.52	-65.38	53.56	773.64	1009.26
P5	91º 30’	76.72	-2.01	76.69	771.63	1085.96
P6	84º 01’	66.72	6.95	66.35	778.59	1152.31
P7	89º 42’	41.64	0.23	41.64	778.82	1193.95
P8	35º 25’	30.94	25.22	17.93	804.03	1211.88
P9	353º 30’	37.18	36.94	-4.22	840.98	1207.66
P10	307º 47’	68.77	42.13	-54.35	883.11	1153.31
P11	311º 50’	175.46	117.33	-130.46	1000.44	1022.86
P1	269º 30’	21.92	-0.19	-21.92	1000.25	1000.94

$\delta\ PM = +0.24$ Perímetro: 794.31

$\delta\ PP = +0.92$ Estaciones: 11

$Ec = 0.97$ $Gp = 1/816$

Ajuste por brújula

En el cuadro a continuación encontramos los datos calculados de las correcciones a las proyecciones, las proyecciones corregidas y las coordenadas obtenidas luego del proceso.

CPM	CPP	PMC	PPC	N	E
				1000.00	1000.00
0.03	0.11	-67.60	-66.20	932.40	933.80
0.03	0.11	-93.44	21.68	838.96	955.48
0.03	0.10	-65.41	53.46	773.55	1008.94
0.02	0.09	-2.03	76.60	771.52	1085.54
0.02	0.08	6.93	66.27	778.45	1151.81
0.01	0.05	0.22	41.59	778.67	1193.40
0.01	0.04	25.21	17.89	803.88	1211.29
0.01	0.04	36.93	-4.26	840.81	1207.03
0.02	0.08	42.11	-54.43	882.92	1152.60
0.05	0.20	117.28	-130.66	1000.20	1021.94
0.01	0.02	-0.20	-21.94	1000.00	1000.00

Ajuste por transito

CPM	CPP	PMC	PPC	N	E
				1000.00	1000.00
-0.04	-0.11	-67.61	-66.20	932.39	933.80
-0.05	0.04	-93.46	21.75	838.93	955.55
-0.03	0.09	-65.42	53.47	773.51	1009.02
0.00	0.13	-2.01	76.56	771.50	1085.58
0.00	0.11	6.95	66.24	778.45	1151.82
0.00	0.07	0.23	41.57	778.68	1193.39
0.01	0.03	25.21	17.90	803.89	1211.29
0.02	0.00	36.92	-4.22	840.81	1207.07
0.02	-0.09	42.11	-54.44	882.92	1152.63
0.06	-0.22	117.27	-130.68	1000.19	1021.95
0.00	-0.03	-0.19	-21.95	1000.00	1000.00

Ajuste por XY

En el cuadro agregamos una columna en la cual se indica la letra que le pertenece a la proyección de acuerdo al cuadrante.

La ecuación primaria corresponde a las proyecciones paralelo, tenemos entonces que estas quedan dispuestas:

$$(66{,}09+66{,}35+41{,}64+17{,}93+21{,}92)X+(21{,}79+53{,}56+76{,}69+4{,}22+54{,}35+130{,}46)Y=0.94$$

$$(67{,}57+6{,}95+0{,}23+25{,}22+0{,}19)X-(93{,}41+65{,}38+2{,}01+36{,}94+42{,}13+117{,}33)Y=0.25$$

Al reducir términos:

$$213{,}93\ X+341{,}07\ Y=0.94$$

$$100{,}16\ X-357{,}20\ Y=0.25$$

Obtenemos los valores de X e Y:

$$X=3.81\times10^{-3}$$
$$Y=3.68\times10^{-4}$$

	CPM	CPP	PMC	PPC	N	E
					1000.00	1000.00
X	0,25	0.25	-67.82	-66.34	932.18	933.66
Y	-0,03	0.01	-93.38	21.78	838.80	955.44
Y	-0,02	0.02	-65.36	53.54	773.44	1008.98
Y	0,00	0.03	-2.01	76.66	771.43	1085.64
X	0,03	0.25	6.92	66.10	778.35	1151.74
X	0,00	0.15	0.23	41.49	778.58	1193.23
X	0,09	0.07	25.13	17.86	803.71	1211.09
Y	-0,01	0.00	36.95	-4.22	840.66	1206.87
Y	-0,02	0.02	42.15	-54.37	882.81	1152.50
Y	-0,04	0.05	117.37	-130.51	1000.19	1022.00
X	0,00	0.08	-0.19	-22.00	1000.00	1000.00

8.4 Cálculo de coordenadas

El cálculo de coordenadas es determinar la posición de puntos en el plano cartesiano y se logra de una manera sencilla, teniendo las coordenadas de un punto origen que debe ser el punto inicial, las coordenadas del segundo punto son:

$$N_i = N_{i-1} \pm PM$$

$$E_i = E_{i-1} \pm PP$$

8.5 Cálculo de áreas

Uno de los valores a calcular mas comúnmente es el área de un predio, este valor puede determinarse gráfica o matemáticamente.
Métodos matemáticos: utilizando las coordenadas cartesianas mediante un arreglo adecuado de los datos:

8.5.1 Métodos gráficos:

Descomposición en figuras geométricas, método de la tira, método de la cuadrícula, red de puntos o planímetro de puntos, planímetro polar, planímetro de carro, etc.

Planímetro de puntos

El planímetro de puntos es una cuadricula de puntos espaciados de una manera uniforme y dibujada sobre un material transparente. Para determinar el área de una figura plana empleando éste tipo de planímetro, se coloca sobre el dibujo a escala, se cuentan los puntos que están dentro del perímetro y sobre él; para lograr una buena medición el número de puntos se cuenta unas tres veces y luego se promedia el resultado.

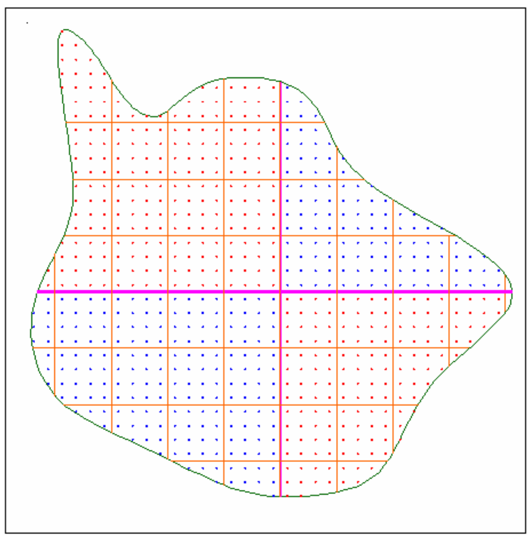


Figura 3. Tomada de Apuntes Planimetría. Julián Garzón B.

Para calcular el resultado se relaciona la densidad de puntos por la unidad de área en el papel con la escala de áreas.

Ejemplo 1:
Se desea determinar el área de dos secciones A y B de una vía en un plano a escala 1:1250, en las cuales se obtuvieron 46 y 45 puntos respectivamente, luego de realizar la media del resultado de los conteos con un planímetro de 4 puntos por centímetro cuadrado.

$$1cm = 1250\,cm \Rightarrow 1cm = 12.5\,m \qquad \frac{46}{4} = 11.5\,cm^2 \qquad \frac{45}{4} = 11.25cm^2$$

$$1cm = 12.5m \quad 1cm = 12.5m$$

$$1cm^2 = 156.25m^2$$

$$1cm^2 = 156.25m^2 \qquad 1cm^2 = 156.25m^2$$

$$11.5cm^2 = X_A \qquad 11.25cm^2 = X_B$$

$X_A = 1796.9\, m^2$

$X_B = 1757.8\, m^2$

Ejemplo 2:
Se desea determinar el volumen entre dos secciones A y B de una vía con longitud de 20m, en un plano a escala horizontal 1:1234 y escala vertical 1:333, en las cuales se obtuvieron 46 y 45 puntos respectivamente, luego de realizar la media del resultado de los conteos con un planímetro de 4 puntos por centímetro cuadrado.

$1cm = 1234\, cm \Rightarrow 1cm = 12.34\, m$ $\qquad \frac{46}{4} = 11.5\, cm^2$ $\qquad \frac{45}{4} = 11.25 cm^2$

$1cm = 333\, cm \Rightarrow 1cm = 3.33\, m$

$1cm = 12.34m \qquad 1cm = 3.33m$

$1cm^2 = 41.09\, m^2$

$1cm^2 = 41.09\, m^2$ $\qquad 1cm^2 = 41.09\, m^2$

$11.5\, cm^2 = \chi$ $\qquad 11.25\, cm^2 = y$

$\chi = 472.53\, m^2$

$y = 462.26\, m^2$

$$volumen = \frac{A\chi + Ay}{2} \times L \quad \Rightarrow \quad volumen = \left(\frac{472.53 m^2 + 462.26 m^2}{2} \right) \times 20m \quad \Rightarrow$$

$volumen = 9347.9 m^3$

Planímetro polar

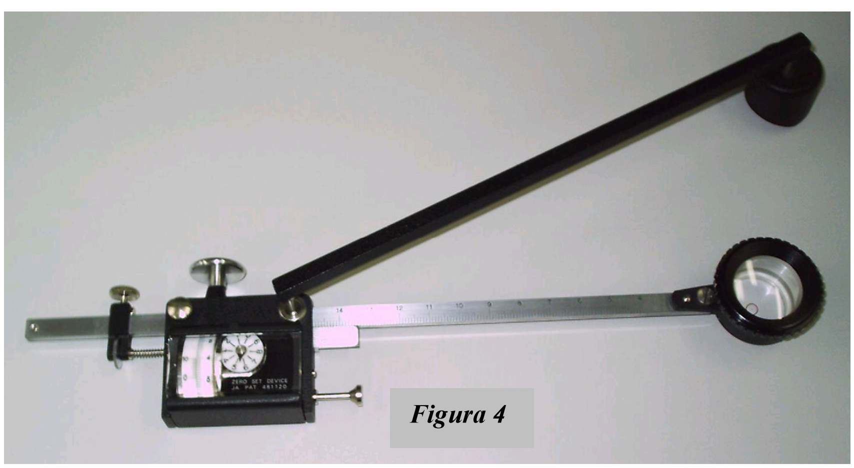


Figura 4

El planímetro polar es un instrumento que nos permite calcular áreas de figuras planas cerradas, por un proceso de integración mecánica, al recorrer su perímetro dibujado en un plano a escala conocida a partir del número de vueltas que da una rueda especialmente graduada que tiene el instrumento por debajo .Dicha rueda gira registrando una cantidad proporcional al área de la figura.

El planímetro se encuentra compuesto de: un polo que es el que fijamos en el momento de medir, un brazo polar que es el que pivota sobre el polo y tiene en el la unidad integradora la cual está formada por el disco integrador que se encuentra conectado al tambor primario dividido en 100 partes para obtener lecturas de 1/1000 de revolución del circulo integrador mediante un nonio; otro indicador nos da el numero de vueltas completas del circulo.

Los planímetros pertenecen a los instrumentos llamados integradores, y se fundan en la propiedad de que el área barrida por una barra de longitud fija es proporcional al camino recorrido por una ruedita de eje paralelo a la barra.

Un planímetro puede ser usado de dos formas:

- Con el polo dentro de la figura.
- Con el polo fuera de la figura.

Con el polo dentro de la figura la forma de trabajo es la siguiente:

1. Se fija el papel para que durante el proceso de medida éste no se mueva.
2. Situar el planímetro de tal forma que durante todo el recorrido sobre la línea de contorno el instrumento no quede ni demasiado abierto, ni demasiado cerrado.
3. Nos aseguramos de que el punto fijo lo esta en realidad y marcamos un punto en el papel que va a ser el punto de partida y llegada del circuito con el planímetro. Sobre este punto es donde se sitúa la marca de la lupa que se encuentra en el brazo trazador y leer en nonio para anotar la lectura.
4. Se recorrer la línea de contorno en el sentido de las manecillas del reloj con la mayor precisión posible hasta llegar de nuevo al punto de que se partió donde realizamos la lectura final.
5. La diferencia entre las dos lecturas multiplicada por el factor de escala, nos proporciona del valor del área.

Para el trabajo con el polo afuera se repiten los mismos pasos que en el procedimiento anterior. Esta forma de empleo del planímetro es más aconsejable que la anterior aunque no se puedan medir áreas tan grandes como las que se miden con el método del polo dentro de la figura.

En los planímetros de tipo mecánicos que son convencionales se debe tener en cuente que para cada medida de área se debe aplicar una constante a una diferencia de lecturas que se obtiene:

Nota: si el área a medir tiene agujeros se podría medir después y restar a mano, pero es te proceso se puede simplificar solo con una forma de medir adecuada con el planímetro. Así pues que si que si el área de la figura presenta irregularidades como vemos en el grafico; lo que podemos hacer es dibujar una línea que una la línea del perímetro con la línea de contorno del hueco y desplazar la marca del planímetro por dicha línea, recorrer el contorno de el hueco en sentido contrario y regresar por la línea el punto desde donde se dibujo, para continuar el proceso de la forma normal. Lo que hace el planímetro es que el resta esa área interior.

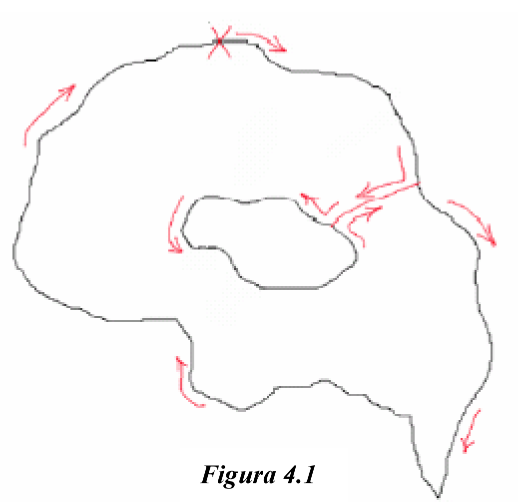


Figura 4.1

Para hacer más práctica la formula del área, suele determinarse, para distintas escalas y longitudes del brazo trazador, lo que corresponde a cada unidad de nonio. Una unidad de nonio corresponde a un milésimo de vuelta de la ruedecilla.
Si llamamos n, el numero de divisiones de nonio que ha variado la lectura en dos posiciones extremas, es decir, la lectura final menos lectura inicial (corresponde al w de la formula).

$w = 2\pi\ rn$, unidad de nonio = $\dfrac{w}{1000}$

$S = \dfrac{2\pi\ rnL}{1000}$, S en mm^2, si r y L están en mm.

$$S(m^2) = \frac{2\pi\ rnL}{(1000)^3}$$

Escala longitudinal E = 1/M
Escala de áreas $E^2 = 1/M^2$

1 unidad en el plano representa M unidades en el terreno, entonces el área de una unidad en el plano es M^2 unidades cuadradas en el terreno.

$S = \dfrac{2\pi\ rLM^2}{(1000)^3} n \quad U$ n, m^2 (U es la unidad del nonio)

Ejemplo:

L = 16.67mm *2πr = 60mm* *E = 1/1000*

$L_0 = 0$ $L_1 = 0.348 \Rightarrow n = l_1 - l_0 \Rightarrow n = 0.348 - 0 \Rightarrow$ *n = 0.348 unidades*

$$S = \frac{60 \times 16.67 \times 1000 \times 1000}{1000 \times 1000 \times 1000} \times 348 = 348.07m^2$$

Nota: En los planímetros generalmente la circunferencia de la ruedecilla trzadora, es decir, *2πr,* vale 60mm.

Papel milimetrado

Es un método sencillo y rápido para calcular áreas gráficamente con el cual se logra una precisión aceptable. Este método también se conoce determinación de áreas por cuadricula.

Colocando sobre el papel milimetrado de calida un dibujo calcado de la figura que se desea medir, se cuenta primero el número de cuadros grandes *ver cuadricula resaltada con naranja en el grafico* (cm^2 o cuadrados de 5×5 mm) y por ultimo en la secciones que quedan se cuentan el numero de cuadros de un mm^2.

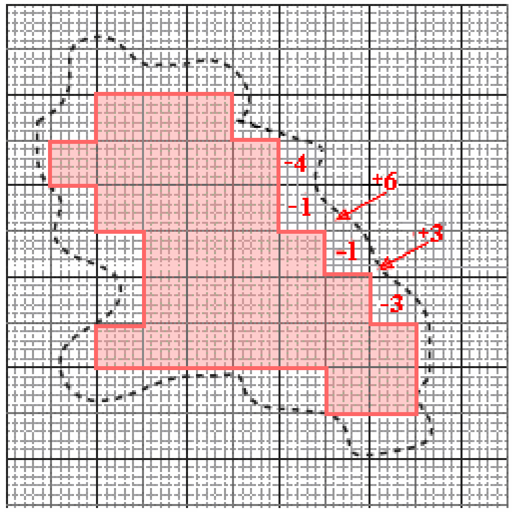


Figura 5.

Áreas por descomposición en triángulos

Este método grafico consiste en formar dentro del perímetro a trabajar, ya sea que este se encuentre conformado por líneas rectas o que sea un contorno irregular, triángulos de los cuales es muy fácil determinar el áreas empleando formulas ya vistas.

Para el caso de que el perímetro esté formado por líneas rectas, la formación de los triángulos es sencilla ver grafico Z y se procede luego a calcular el área de cada uno para luego sumarlas obtener el área total.

Cuando se presente que el perímetro se encuentra formado por líneas curvas o sea que es un perímetro irregular, lo que se tiene que hacer es cambiar los limites irregulares por líneas que tengan la característica de compensar las áreas excluidas a raíz de este proceso, con áreas incluidas para el calculo que no pertenecen a la figura levantada, ver figura Z, para continuar luego con la división en triángulos que en conjunto serán equivalentes a el área de la región trabajada. La ubicación de dichas líneas se lleva acabo a ojo, preferiblemente con una regla transparente que facilite el tanteo para la compensación.

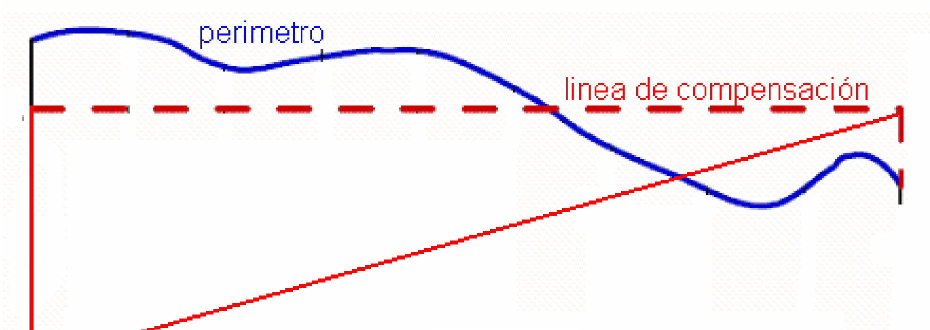


Figura 6

8.5.2 Métodos Analíticos

Método de Gauss

En este método, conocidas las coordenadas de los vértices de un polígono, por medio de estas podemos conocer el área de la región poligonal aplicando dos métodos: (*fig 7).*

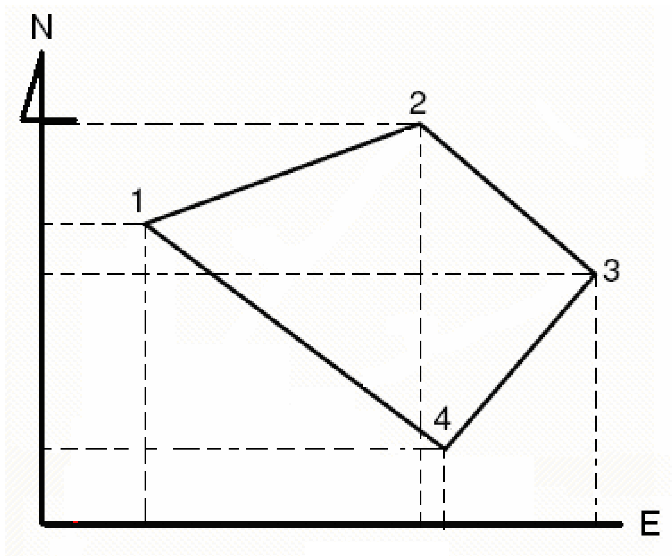


Figura 7

Método A.

$$2A = \left[\left(N_1E_2 + N_2E_3 + N_3E_4 + N_4E_1\right) - \left(E_1N_2 + E_2N_3 + E_3N_4 + E_4N_1\right)\right]$$
$$2A = \left[\sum\left(N_iE_{i+1}\right) - \sum\left(E_iN_{i+1}\right)\right]$$

Método B

$$\begin{array}{cc} N_1 & E_1 \\ N_2 & E_2 \\ N_3 & E_3 \\ N_4 & E_4 \\ N_1 & E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} & E_4 \\ N_1 & E_1 \\ N_2 & E_2 \\ N_3 & E_3 \\ N_4 & E_4 \\ & E_1 \end{array}$$

$$2A = \left[N_1\left(E_2 - E_4\right) + N_2\left(E_3 - E_1\right) + N_3\left(E_4 - E_2\right) + N_4\left(E_1 - E_3\right)\right]$$

$$2A = \sum_{i=1}^{n} N_i\left(E_{i+1} - E_{i-1}\right)$$

Ejemplo:
Calcular por el método A el área del siguiente polígono.

$N_1=100$ $E_1=100$
$N_2=60$ $E_2=70$
$N_3=30$ $E_3=50$
$N_4=50$ $E_4=20$

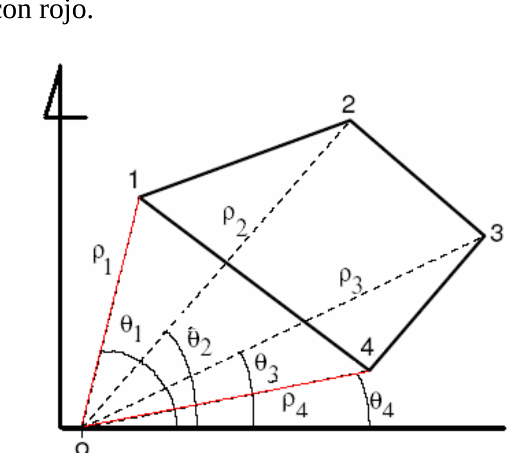
$$2A = 100(70-20)+60(50-100)+30(20-70)+50(100-50)=5000-3000-1500+2500=3000 \Rightarrow$$

$$A = \frac{3000}{2} = 1500 \; unidades\ de\ área$$

Método de coordenadas polares

Es un método que nos permite calcular el área de un polígono, que se ha radiado desde un mismo punto, sin necesidad de determinar las coordenadas para aplicar el método de gauss.

En la *(Fig. 8)* se puede ver el polígono 1 2 3 4, y las radiaciones a cada uno de los vértices, las cuales en el dibujo forman un triángulos, así para obtener el área de el polígono, se obtienen la áreas de cada uno de los triángulos (O12, O23, O34) se suman y luego se la resta la del ángulo O14 que se encuentra marcado con rojo.



Método de los trapecios

Figura 8

Este se emplea cuando se necesita determinar en un plano el área de una figura cuya línea de contorno es una línea curva como la que vemos en la figura. Para lograr tal fin se divide la línea de levantamiento en un cierto número de pequeños intervalos de iguales longitudes h_i y unas líneas perpendiculares formando cada par de ellas trapezoides de los cuales podemos hallar el área.

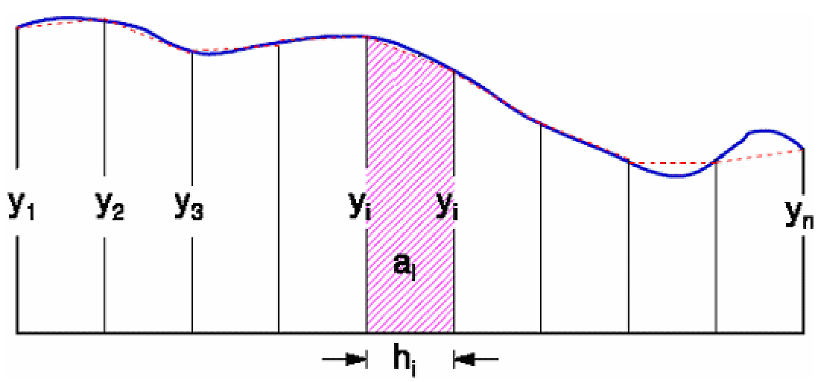


Figura 9

Para simplificar el trabajo del cálculo de toda la figura se utiliza la siguiente formula:

$$A = \frac{h_i}{2}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + ... + y_n)$$

Método de simpson

Este metodo también conocido como regla de simpson, se utiliza cuando se emplea para calcular el área con mayor precisión de de figuras con contorno irregular. En esta procedimiento se hace la suposición que el contorno de la figura está compuesto por una serie de arcos parabólicos, así pues que la figura debe ser dividida en un número par de franjas (*ver fig. 10)*.

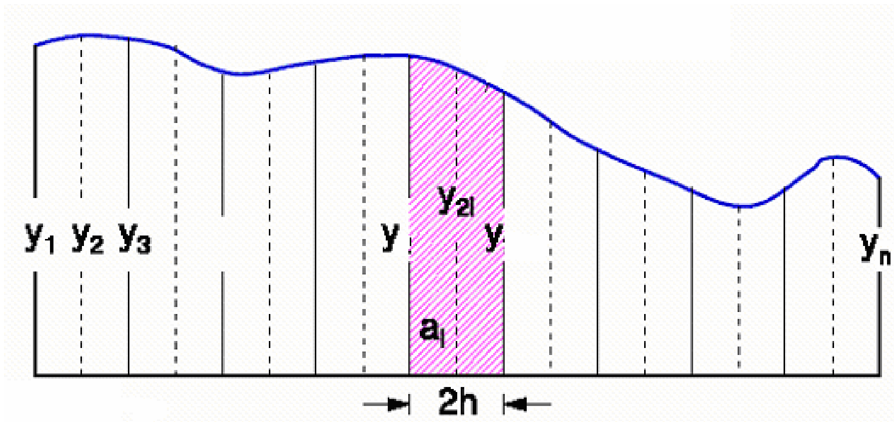


Figura 10

Para determinar el área de toda la figura se aplica la siguiente formula:

$$A = \frac{h}{3}\left(x + 2O + 4e\right)$$

Donde: x es la suma de la primera y la ultima perpendiculares ($y_{1+}\ y_n$).
O es la suma de las perpendiculares impares restantes.
e de las perpendiculares pares.

8.6 Omisión de datos en una poligonal[1]

Se puede presentar ocasionalmente, al realizar el levantamiento de un polígono cerrado, que no es posible tomar todos los datos de campo o se olvido tomar datos; las soluciones se basan en que el polígono debe cerrarse forzosamente. Este problema puede resolverse si los datos omitidos se reducen a:

- Longitud y rumbo de un lado.
- Longitud de un lado y rumbo de otro.
- Longitud de dos lados.
- Rumbo de dos lados.

La desventaja de este método radica en que no existe comprobación de las medidas restantes es decir, hay que suponer que los valores de campo no están afectados por valores de ninguna clase.

A continuación se explican la solución a problemas para cada uno de los casos:

[1] Tomado de los Apuntes sobre cálculos de Gilberto Gómez Gómez.

8.6.1 Desconocida la longitud y el rumbo de un lado.

LADO	LONGITUD	RUMBO
1-2	417.26	S 79º 00’ W
2-3	219.78	S 31º 15’ W
3-4	Omitida	Omitida
4-5	318.25	N 86º 45’ E
5-1	551.40	N 01º 30’ W

Solución:

a). Se calculan las proyecciones de los lados conocidos.
b). Se determina el $\boldsymbol{\delta}$ ***N.S*** y el $\boldsymbol{\delta}$ ***E.W*** .
c). Se determina el error de cierre con la formula que se vio anteriormente, éste valor equivale a la distancia omitida 3-4.
d). Se determina la dirección de la línea de cierre, equivaliendo esta dirección al rumbo del lado omitido.

Lado	Longitud	Rumbo	PM	PP
1-2	417.26	S 79º 00’ W	-79.61	-409.58
2-3	219.78	S 31º 15’ W	-187.89	-114.02
3-4				
4-5	318.25	N 86º 45’ E	18.04	317.74
5-1	551.40	N 01º 30’ W	551.23	-14.45
			ΣPM = 301.77	***ΣPP*=** -220.31

$\boldsymbol{\delta}$ ***N.S*** = 301.77
$\boldsymbol{\delta}$ ***E.W* = -**220.31

Ec = $\sqrt{(301.77)^2 + (-220.31)^2}$ = $\sqrt{139601.63}$ = 373.63 $\Rightarrow$ Ec = 373.63 $\Rightarrow$ *Longitud de 3-4 = 373.63.*

tan R = $\dfrac{-220.31}{+301.77}$ = - 0.7300 $\Rightarrow$ R = 36º 08’ $\Rightarrow$ *R = S 36º 08’ E*

Por el signo de la tangente nos damos cuenta que el rumbo de la línea 3-4 es SE o NW (tangente negativa en el 2º y el 4º cuadrante); puesto que las proyecciones Sur son menores que las Nortes, entonces el rumbo de la línea es SE.

8.6.2 Desconocida la longitud de un lado y el rumbo de otro.

En este tipo de problemas se pueden presentar dos casos:

1. Los datos omitidos son de dos lados consecutivos.
2. Los datos omitidos son de dos lados no consecutivos.

Caso 1.

LADO	LONGITUD	RUMBO
1-2	417.26	S 79º 00’ W
2-3	219.78	S 31º 15’ W
3-4	374.63	Omitida
4-5	Omitida	N 86º 45’ E
5-1	551.40	N 01º 30’ W

Solución:

a). Se calculan las proyecciones de los lados conocidos.
b). Se determina el ***δ N.S*** y el ***δ E.W*** .
c). Se determina el error de cierre y la dirección de esa línea.
d). Con Los datos obtenidos, el rumbo conocido y la longitud conocida se construye un triangulo que puede resolverse completamente por trigonometría. (Ley de Senos)
e). Se analizan los resultados obtenidos para determinar el rumbo del lado de la dirección desconocida.

Lado	Longitud	Rumbo	PM	PP
1-2	417.26	S 79º 00’ W	-79.61	-409.58
2-3	219.78	S 31º 15’ W	-187.89	-114.02
3-4	374.63			
4-5		N 86º 45’ E		
5-1	551.40	N 01º 30’ W	551.23	-14.45
			ΣPM = 283.73	***ΣPP*** **=** -538.05

δ N.S = 283.73
δ E.W **=** -538.05

Ec = $\sqrt{(283.73)^2 + (-538.05)^2}$ = $\sqrt{370000.52}$ = 608.28 $\Rightarrow$ *Longitud de línea auxiliar = 608.28*

tan R = $\dfrac{538.05}{283.73}$ = - 1.8963 $\Rightarrow$ R = 62º 12’ $\Rightarrow$ *R = N 62º12’ W o S 62º12’E*

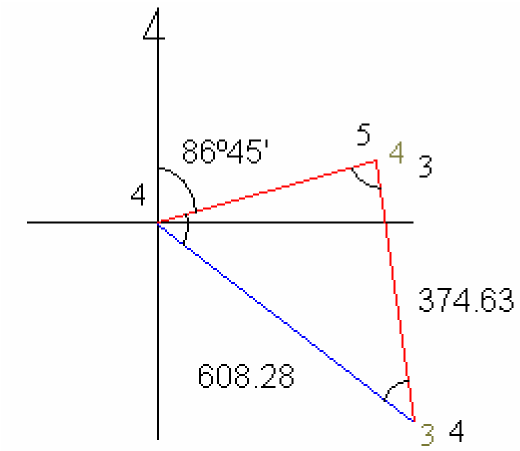


Figura 11

Por inspección puede determinarse que el rumbo de la línea es SE; la línea auxiliar para determinar el triángulo es:

L = 608.28   R= S62º12'E

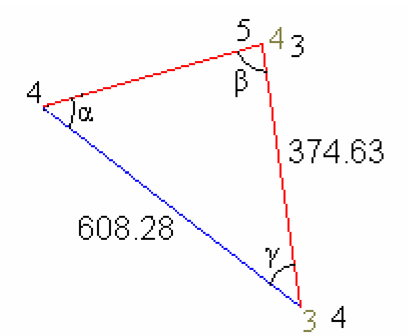


Figura 12

Az linea auxiliar = 180º - 62º12' = 117º 48'

α = 117º 48' – 86º 45' = 31º 03'

$$\frac{374.63}{\text{sen}31º03'} = \frac{608.28}{sen\beta} \Rightarrow \quad \text{sen } \beta = \frac{sen31º03' \times 608.28}{374.63} = 0.8375$$

β = 56º 53'

Puesto que el ángulo β es mayor de 90º ⇒ el ángulo β = 180º- 56º 53' = 123º 07'
γ = 180º - (31º 03' + 123º 07') ⇒ γ = 25º 50'

$$\frac{(4-5)}{\text{sen}25º50'} = \frac{374.63}{sen31º03'} \quad \Rightarrow \ (4\text{-}5) = \frac{0.4358 \times 374.63}{0.5158} = 316.52$$

Longitud (4-5) = 316.52

Az línea auxiliar = 360º - 62º 12' = 297º 48'

Az (4- 3) = 297º 48' +25º 50' = 323º 38'

R (4-3) = 360º - 323º 38’ = 36º 22’ $\Rightarrow$ R (4-3) = N 36º 22’ W

Al observar el cuadro de las proyecciones calculadas, nos podemos dar cuenta que el rumbo (3-4) debe ser SE para poder balancear las proyecciones N con las proyecciones S y las proyecciones E con las proyecciones W.

Entonces en definitiva:

R (3-4) = S36º 22’ E
Longitud (4-5) = 316.52

Caso 2

LADO	LONGITUD	RUMBO
1-2	Omitido	S 79º 00’ W
2-3	219.78	S 31º 15’ W
3-4	374.63	S 36º15’ E
4-5	318.25	Omitido
5-1	551.40	N 01º 30’ W

Solución:

a).Lo mismo que el caso anterior y el triángulo se forma haciendo caso omiso de que los lados desconocidos no son adyacentes.

Lado	Longitud	Rumbo	PM	PP
1-2		S 79º 00’ W		
2-3	219.78	S 31º 15’ W	-187.89	-114.02
3-4	374.63	S 36º15’ E	-302.10	221.52
4-5	318.25			
5-1	551.40	N 01º 30’ W	551.23	-14.45
			ΣPM = 61.24	***ΣPP***= 93.05

δ N.S = 61.24
δ E.W = 93.05

Ec = $\sqrt{(61.24)^2 + (93.05)^2}$ = $\sqrt{12408.64}$ = 111.39 $\Rightarrow$ *Longitud de línea auxiliar =111.39*

tan R = $\frac{93.05}{61.24}$ = 1.5194 $\Rightarrow$ R Línea auxiliar = S 56º 39’ W

Se construye el triángulo con los datos conocidos:

- R línea auxiliar = S 56º 39’ W
- L línea auxiliar = 111.39

- R (AB) = S 79º 00’ W
- L (BC) = 318.25

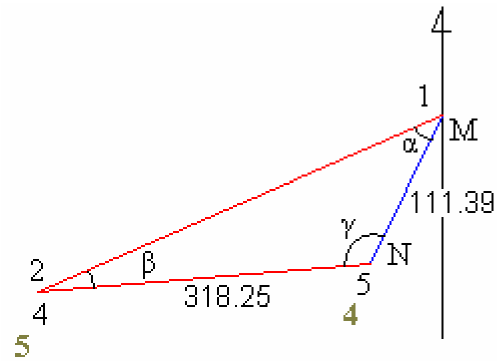


Figura 13

R línea auxiliar = S56º 39’ W ⇒ Az línea auxiliar = 236º39’
Az (AB) = 259º 00’

α = 259º00’ – 236º39’ = 22º 21’

$$\frac{318.25}{\text{sen}22º21'} = \frac{111.39}{sen\beta} \Rightarrow \quad \text{sen}\ \beta = \frac{0.3803 \times 111.39}{318.25} = 0.1333 \Rightarrow \beta = 7º\ 39'$$

γ = 180º - (7º 39’ + 22º 21’) ⇒ γ = 150º

$$\frac{AB}{sen150º} = \frac{318.25}{sen22º21'} \Rightarrow \text{AB} = \frac{318.25 \times 0.500}{0.3803} = 418.40$$

Longitud (AB) = 418.40

Az línea auxiliar = 236º 39’ – 180º = 56º 39’

Az (CB) = (56º39’+360º) - γ = 266º 39’

No sabemos si la línea es (CB) o (BC) es decir Az (CB)= 266º39’ o Az (BC)= 266º 39’ ⇒ R (CB) = S 86º39’ W o R (BC) = N 86º39’ E

Puesto que (AB) tiene un rumbo SW ⇒ PM (AB) = 418.40 × 0.1908 = 79.83 ⇒ al realizar de nuevo la sumatoria de PM nos da un resultado de -18.59 lo que nos indica que el valor de la proyección que falta debe ser positivo por lo tanto el rumbo es NE para balancear las proyecciones.

En Definitiva:

Longitud (AB) = 418.40
R (BC) = N 86º 39’ E

8.6.3 Desconocida la longitud de dos lados

Para este también se presentan dos casos:

1. Los datos omitidos son los de dos lados consecutivos
2. Los datos omitidos son los de dos lados no consecutivos

Caso 1.

LADO	LONGITUD	RUMBO
1-2	417.26	S 79º 00’ W
2-3	Omitida	S 31º 15’ W
3-4	Omitida	S36º 15’E
4-5	318.25	N 86º 45’ E
5-1	551.40	N 01º 30’ W

Solución:

a). Se calculan las proyecciones de los lados conocidos.
b). Se determina el ***δ N.S*** y el ***δ E.W*** .
c). Se determina el error de cierre y la dirección de esa línea.
d). Con los datos obtenidos se construye un triangulo (línea auxiliar de dirección dada, y dos líneas de dirección conocida), que se puede resolver por Ley de Senos.

Lado	Longitud	Rumbo	PM	PP
1-2	417.26	S 79º 00’ W	-79.61	-409.58
2-3		S 31º 15’ W		
3-4		S 36º 15’ E		
4-5	318.25	N 86º 45’ E	18.04	317.74
5-1	551.40	N 01º 30’ W	551.23	-14.45
			ΣPM = 489.66	***ΣPP****= -106.29*

δ N.S = 489.66
δ E.W **=** -106.29
Ec = $\sqrt{(489.66)^2 + (106.295)^2}$ = $\sqrt{251064.48}$ = 501.06 $\Rightarrow$ *Longitud de línea auxiliar =501.06*

tan R = $\dfrac{-106.29}{489.66}$ = -0.2117 $\Rightarrow$ R Línea auxiliar = S 12º 15’ E ó N 12º 15’ W $\Rightarrow$

R Línea auxiliar = S 12º 15’ E

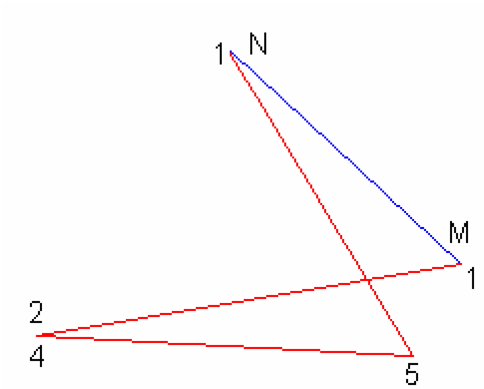


Figura 15

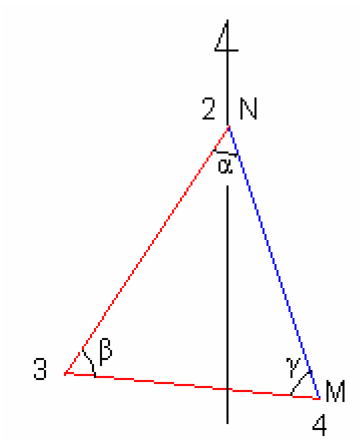


Figura 16

Az Línea auxiliar = 180º - 12º 15’ = 167º 45’ ⇒ Az Línea auxiliar = 167º 45’
Az (2-3) = 180º +31º 15’ = 211º 15’ ⇒ Az (2-3) = 211º 15’
Az (3-4) = 180º - 36º 15’ = 143º 45’ ⇒ Az (3-4) = 143º 45’

α = Az (2-3) – Az Línea auxiliar = 211º 15’ - 167º 45’ = 43º 30’ ⇒ α = 43º 30’

β = Az (3-4) – Az (3-2) = 143º 45’ – (211º 15’ – 180º) = 112º 30’ ⇒ β = 112º 30’

γ = Az Línea auxiliar – Az (4-3) = (167º 45’ + 180º) – (143º 45’ + 180º) = 24º 00’ ⇒ γ = 24º 00’

$$\frac{501.06}{sen112^{o}30'} = \frac{(2-3)}{sen24^{o}00'} \Rightarrow (2\text{-}3) = \frac{0.4067x501.06}{0.9239} \Rightarrow L\ (2\text{-}3) = 220.56$$

$$\frac{(3-4)}{sen43^{o}30'} = \frac{501.06}{sen112^{o}30'} \Rightarrow (3\text{-}4) = \frac{501.06x0.6884}{0.9223} \Rightarrow L\ (3\text{-}4) = 373.34$$

En Definitiva:

Longitud (2-3) = 220.56
Longitud (3-4) = 373.34

Caso 2.

LADO	LONGITUD	RUMBO
1-2	417.26	S 79º 00’ W
2-3	219.78	S 31º 15’ W
3-4	Omitido	S 36º15’ E
4-5	318.25	N 86º45’ E
5-1	Omitido	N 01º 30’ W

Solución:

a).Lo mismo que el caso anterior, haciendo caso omiso a que los lados desconocidos no son consecutivos.

Lado	Longitud	Rumbo	PM	PP
1-2	417.26	S 79º 00’ W	-79.61	-409.58
2-3	219.78	S 31º 15’ W	-187.89	-114.02
3-4		S 36º15’ E		
4-5	318.25	N 86º 45’E	18.04	317.74
5-1		N 01º 30’ W		
			ΣPM = -249.46	***ΣPP***= -205.86

δ N.S = -249.46
δ E.W = -205.86

Ec = $\sqrt{(249.46)^2 + (205.86)^2}$ = $\sqrt{104608.63}$ = 323.43 ⇒ *Longitud de línea auxiliar =323.43*

tan R = $\dfrac{-205.86}{-249.46}$ = 0.8252 ⇒ R Línea auxiliar = N 39º 32’ E ó S 39º 32’ W ⇒

R Línea auxiliar = N 39º 32’ E

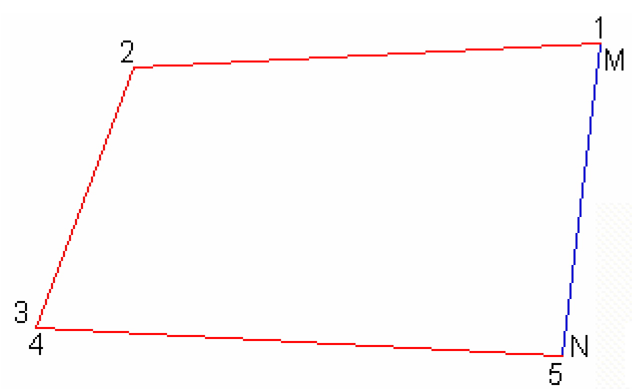


Figura 17

Se construye el triángulo con los siguientes datos:

- L Línea auxiliar = 323.43; R Línea auxiliar = N 39º 32’ E
- R (3-4) = S 36º 15’ E
- R (5-1) = N 01º 30’ W

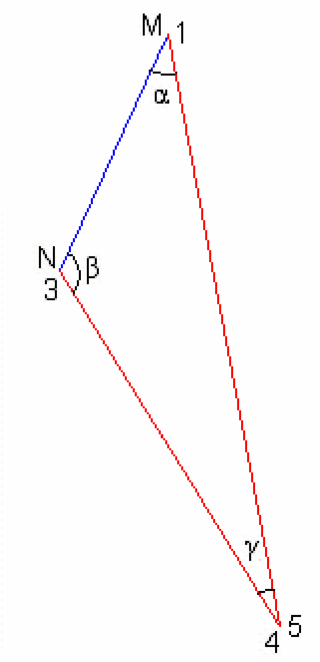


Figura 18

Az (5-1) = 360º - 01º 30’ ⇒ Az (5-1) = 358º 30’

Az (1-5) = 358º 30’ – 180º ⇒ Az (1-5) = 178º 30’

Az Línea auxiliar = 39º 32’
CAz Línea auxiliar = 39º 32’ + 180º ⇒ CAz Línea auxiliar = 219º 32’

Az (3-4) = 180º - 36º 15’ ⇒ Az (3-4) = 143º 45’

Az (4-3) = 143º 45’ + 180º ⇒ Az (4-3) = 323º 45’

α = CAz Línea auxiliar – Az (1-5) = 219º 32’ – 178º 30’ = 41º 02’ ⇒ α = 41º 02’

β = Az (3-4) – Az Línea auxiliar = 143º 45’ – 39º 32’ = 104º 13’ ⇒ β = 104º 13’

γ = Az (5-1) – Az (3-4) = 358º 30’ – 323º 45’ = 34º 45’ ⇒ γ = 34º 45’

$$\frac{323.43}{\text{sen}34º45'} = \frac{(3-4)}{sen41º02'} \Rightarrow (3\text{-}4) = \frac{323.43 \times 0.6565}{0.5700} \Rightarrow \text{L } (3\text{-}4) = 372.51$$

$$\frac{323.43}{\text{sen}34º45'} = \frac{(5-1)}{sen104º13'} \Rightarrow (5\text{-}1) = \frac{323.43 \times 0.9694}{0.5700} \Rightarrow \text{L } (5\text{-}1) = 550.05$$

En Definitiva:

Longitud (3-4) = 372.51
Longitud (5-1) = 550.05

8.6.4 Desconocidos los rumbos de dos lados

Para este también se presentan dos casos:

1. Los datos omitidos son los de dos lados consecutivos
2. Los datos omitidos son los de dos lados no consecutivos

Caso 1.

LADO	LONGITUD	RUMBO
1-2	417.26	S 79º 00’ W
2-3	219.78	Omitida
3-4	374.63	Omitida
4-5	318.25	N 86º 45’ E
5-1	551.40	N 01º 30’ W

Solución:

a). b), c) y d) como los casos anteriores.
e). Con todos los datos obtenidos se analizan todos los posibles triángulos solución del problema.

Lado	Longitud	Rumbo	PM	PP
1-2	417.26	S 79º 00’ W	-79.61	-409.58
2-3	219.78			
3-4	374.63			
4-5	318.25	N 86º 45’ E	18.04	317.74
5-1	551.40	N 01º 30’ W	551.23	-14.45
			ΣPM = 489.66	***ΣPP*=** -106.29

δ N.S = 489.66
***δ E.W* =** -106.29

Ec = $\sqrt{(489.66)^2 + (106.29)^2}$ = $\sqrt{251064.48}$ = 501.06 ⇒ *Longitud de línea auxiliar =501.06*

tan R = $\dfrac{-106.29}{489.66}$ = -0.2171 ⇒ R Línea auxiliar = S 12º 15’ E ó N 12º 15’ W ⇒

R Línea auxiliar = S 12º 15’ E

Elementos para construir el triángulo:

- Longitud Línea auxiliar = 501.06; R Línea auxiliar = S 12º 15’ E
- Longitud (2-3) = 219.78
- Longitud (3-4) = 374.63

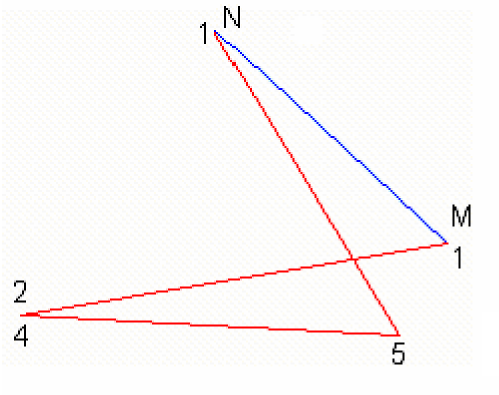


Figura 19

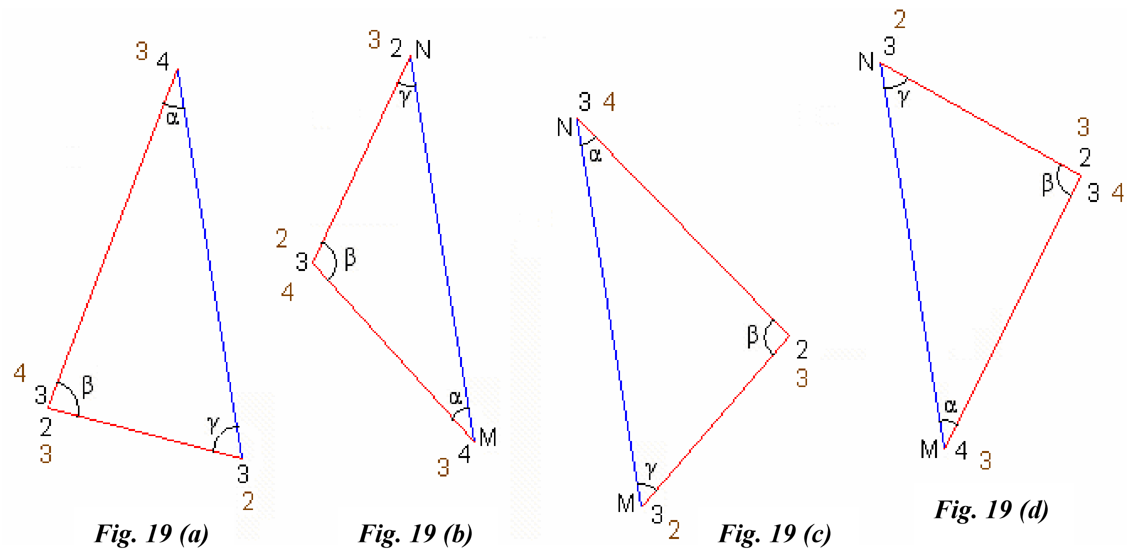


Fig. 19 (a) ***Fig. 19 (b)*** ***Fig. 19 (c)*** ***Fig. 19 (d)***

Para la construcción del triángulo cualquiera de las 4 posibilidades que existen, satisfacen las condiciones de acuerdo a los datos; en todos los casos los ángulos van a tomar el mismo valor (congruencia de triángulos), los cuales van a diferir en el cuadrante (el Rumbo), de acuerdo a la posición que se les de dentro de los cuadrantes. Por el análisis del cuadro de proyecciones o por comprobación de los valores podemos obtener la verdadera dirección de los lados.

Asumimos la posibilidad (a)

- Longitud Línea auxiliar = 501.06
- R Línea auxiliar = S 12º 15’ E
- Longitud (2-3) = 219.78
- Longitud (3-4) = 374.63

Ley de Cósenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \alpha$

$a^2 = (219.78)^2 = 48303.25$
$b^2 = (501.06)^2 = 251061.12$
$c^2 = (374.63)^2 = 140347.64$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{48303.25 - 251061.12 - 140347.64}{-2\times 501.06\times 374.63} = \frac{-343105.51}{-375424.22} = 0.9139$$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0.9139 \;\Rightarrow\; \alpha = 23º\ 57'$

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{251061.12 - 48303.25 - 140347.64}{-2\times 219.78\times 374.63} = \frac{+62140.23}{-164672.36} = -0.3790$$

$\Rightarrow \cos\beta = -0.3790 \;\Rightarrow\; \beta = 112º\ 16'$

$$\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \frac{140347.64 - 48303.25 - 251061.12}{-2\times 219.78\times 501.06} = \frac{-159016.73}{-220245.93} = 0.7220$$

$\Rightarrow \cos\gamma = 0.7220 \;\Rightarrow\; \gamma = 43º\ 47'$

De acuerdo al grafico (a)

Az Línea auxiliar = 180º - 12º 15’ ⇒ Az Línea auxiliar =167º 45’

Az (3-4) = Az Línea auxiliar + α = 167º 45’ + 23º 57’ ⇒ Az (3-4) = 191º 42’
R (3-4) = 191º 42’ – 180º = 11º 42’ ⇒ R (3-4) = S 11º 42’ W
R (4-3) = N 11º 42’ E ⇒ Az (4-3) = 11º 42’

Az (2-3) = Az (4-3) + β = 11º 42’ + 112º 16’ ⇒ Az (2-3) = 123º 58’
R (2-3) = 180º - 123º 58’ = 56º 02’ ⇒ R (2-3) = S 56º 02’ E

R (2-3): S 56º 02’ E ó N 56º 02’ W
R (3-4): N 11º 42’ E ó S 11º 42’ W
De acuerdo con el grafico (b)

Az (2-3) = Az Línea auxiliar + γ = 167º 45’ + 43º 47’ ⇒ Az (2-3) = 211º 32’
Az (3-2) = 211º 32’ – 180º = 31º 32’ ⇒ Az (3-2) = 31º 32’
Az (3-4) = Az (3-2) + β = 31º 32’ + 112º 16’ ⇒ Az (3-4) = 143º 48’

R (2-3) = 211º 32’ - 180º = 31º 32’ ⇒ R (2-3) = S 31º 32’ W
R (3-4) = 180º - 143º 48’ = 36º 12’ ⇒ R (3-4) = S 36º 12’ E

R (2-3): N 31º 32’ E ó S 31º 32’ W
R (3-4): S 36º 12’ E ó N 36º 12’ W

De acuerdo con el grafico (c)

Az (3-4) = Az Línea auxiliar - α = 167º 45’ - 23º 57’ $\Rightarrow$ Az (3-4) = 143º 48’
Az (4-3) = 143º 48’ + 180º = 323º 48’ $\Rightarrow$ Az (4-3) = 323º 48’
Az (3-2) = Az (4-3) - β = 323º 48’ - 112º 16’ $\Rightarrow$ Az (3-2) = 211º 32’

Az (2-3) = 211º 32’ - 180º = 31º 32’ $\Rightarrow$ Az (2-3) = 31º 32’
R (3-4) = 180º - 143º 48’ = 36º 12’ $\Rightarrow$ R (3-4) = S 36º 12’ E

R (2-3): N 31º 32’ E ó S 31º 32’ W
R (3-4): S 36º 12’ E ó N 36º 12’ W

De acuerdo con el grafico (d)

Az (2-3) = Az Línea auxiliar - γ = 167º 45’ - 43º 47’ $\Rightarrow$ Az (2-3) = 123º 58’

Az (3-2) = 123º 58’ + 180º = 303º 58’ $\Rightarrow$ Az (3-2) = 303º 58’
Az (3-4) = Az (3-2) - β = 303º 58’ - 112º 16’ $\Rightarrow$ Az (3-4) = 191º 42’

R (2-3) = 180º - 123º 58’ = 56º 02’ $\Rightarrow$ R (2-3) = S 56º 02’ E
R (3-4) = 191º 42’ - 180º = 11º 42’ $\Rightarrow$ R (3-4) = S 11º 42’ W

R (3-2): S 56º 02’ E ó N 56º 02’ W
R (3-4): N 11º 42’ E ó S 11º 42’ W

Entonces las posibilidades se reducen a:

Rumbo (3-2)	Rumbo (3-4)
S 56º 02’ E	N 11º 42’ E
N 56º 02’ W	S 11º 42’ W
N 31º 32’ E	S 36º 12’ E
S 31º 32’ W	N 36º 12’ W

Observando el cuadro de proyecciones, podemos darnos cuenta que la suma de proyecciones N es mayor que la suma de proyecciones S, asumimos entonces que los rumbos <u>deben</u> ser S; las posibilidades se reducen entonces a:

R (2-3): S 56º 02’ E ó S 31º 32’ W
R (3-4): S 11º 42’ W ó S 36º 12’ E

Longitud (2-3) = 219.78 Longitud (3-4) = 374.63

La diferencia entre las proyecciones E y W es de 106.29 siendo mayor las proyecciones W, podemos entonces decir:

Para obtener las proyecciones sobre el paralelo necesitamos el seno del rumbo.

$sen 56º02' \times 219.78 = 0.8294 \times 219.78 = +182.28$
$sen 31º32' \times 219.78 = 0.5230 \times 219.78 = -114.94$
$sen 11º42' \times 374.63 = 0.2028 \times 374.63 = -75.97$
$sen 36º12' \times 374.63 = 0.5906 \times 374.63 = +221.26$

+182.28 – 75.97 = +106.31 (1)
+182.28 + 221.26 = +403.54
-114.94 – 75.97 = -190.91
-114.94 + 221.26 = -106.32 (4)

(a) y (d) satisfacen la condición que la diferencia de proyecciones vale 106.31, entonces la solución puede ser:

Rumbo (2-3) = S 56º 02' E y Rumbo (3-4) = S 11º 42' W
ó
Rumbo (2-3) = S 31º 32' W y Rumbo (3-4) = S 36º 12' E

El gráfico sería entonces

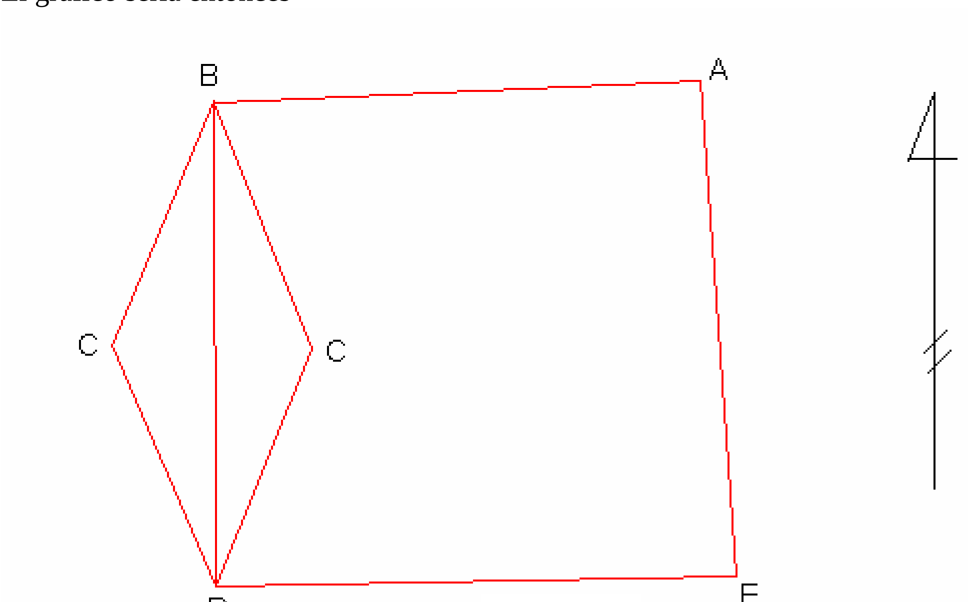


Figura 20

Para poder determinar la verdadera solución necesitamos conocer una condición adicional, tal como (2-3) dirección SE, etc.

Caso2

LADO	LONGITUD	RUMBO
1-2	417.26	S 79º 00' W
2-3	219.78	Omitida
3-4	374.63	S 36º 15' E
4-5	318.25	Omitida
5-1	551.40	N 01º 30' W

Solución:

a). b), c) y d) como los casos anteriores.
e). Con todos los datos obtenidos se analizan todos los posibles triángulos solución del problema.

Lado	Longitud	Rumbo	PM	PP
1-2	417.26	S 79º 00' W	-79.61	-409.58
2-3	219.78			
3-4	374.63	S 36º 15' E	-302.10	221.52
4-5	318.25			
5-1	551.40	N 01º 30' W	551.23	-14.45
			ΣPM = 169.52	***ΣPP=*** *-202.51*

δ N.S = 169.52
δ E.W = -202.51

Ec = $\sqrt{(169.52)^2 + (202.51)^2}$ = $\sqrt{69747.33}$ = 264.10 ⇒ *Longitud de línea auxiliar =264.10*

tan R = $\dfrac{-202.51}{169.52}$ = -1.1946 ⇒ R Línea auxiliar = S 50º 04' E ó N 50º 04' W

Elementos para construir el triángulo

Longitud Línea auxiliar = 264.10
Rumbo Línea auxiliar = S 50º 04' E
Longitud (2-3) = 219.78
Longitud (4-5) = 318.25

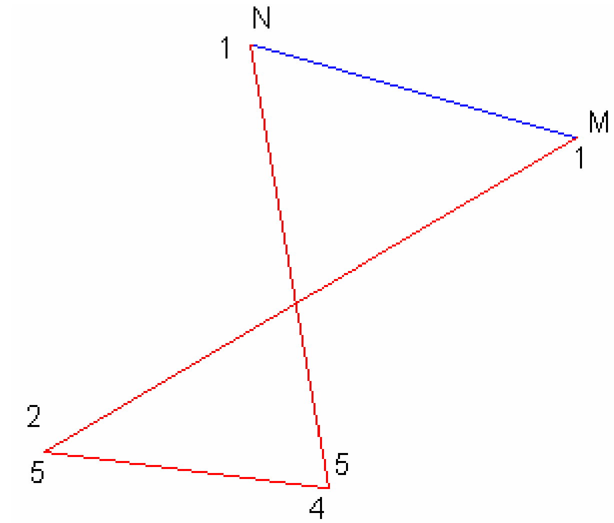


Figura 21

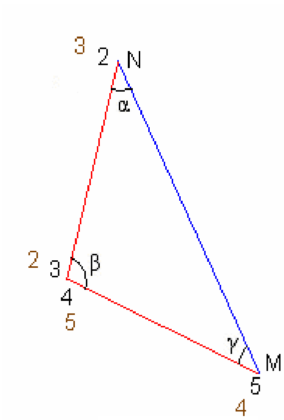


Figura 22

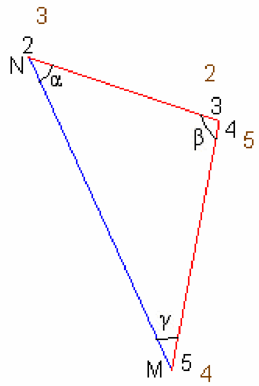


Figura 23

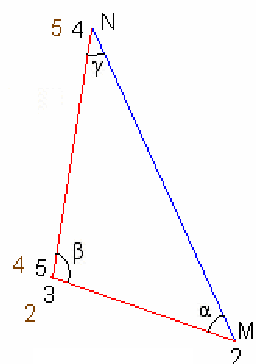


Figura 24

3

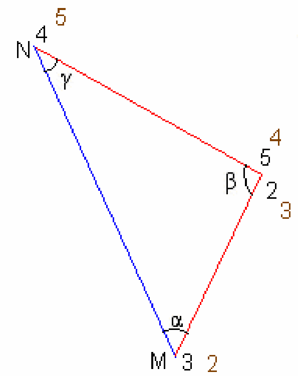


Figura 25

Calculamos los ángulos α, β, γ para las posibilidades (1) y (2), pues los valores se repiten para (4) y (3) respectivamente como en el problema anterior.

Longitud (4-5) = a = 318.25
Longitud línea auxiliar = b = 264.10
Longitud (2-3) = c = 219.78
Rumbo Línea auxiliar = S 50º 04’ E

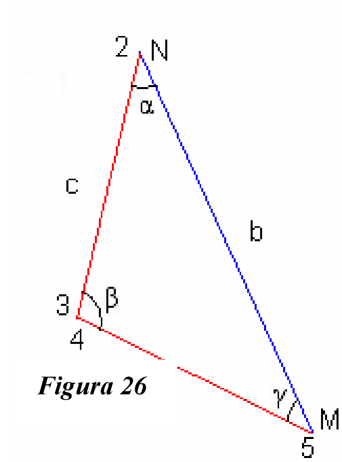


Figura 26

$a^2 = (219.78)^2 = 48303.25$
$b^2 = (501.06)^2 = 251061.12$
$c^2 = (374.63)^2 = 140347.64$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{101283.06 - 69748.81 - 48303.25}{-2\times 264.10\times 219.78} = \frac{-16769.00}{-116087.80} = 0.1444$$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0.1444 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 81^{\circ}\ 42’$

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{69748.81 - 101283.06 - 48303.25}{-2\times 318.25\times 219.78} = \frac{-79837.50}{-139889.97} = +0.5707$$

$\Rightarrow \cos\beta = 0.5707 \quad \Rightarrow \quad \beta = 55^{\circ}\ 12$

$$\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \frac{48303.25 - 101283.06 - 69748.81}{-2\times 318.25\times 264.10} = \frac{-122728.62}{-168099.65} = +0.7301$$

$\Rightarrow \cos\gamma = 0.7301 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 43^{\circ}\ 06’$

Az Línea auxiliar = 180º - 50º 04’ ⇒ Az Línea auxiliar = 129º 56’

Az (2-3) = Az Línea auxiliar + α = 129º 56’ + 81º 42’ ⇒ Az (2-3) = 211º 38’
Az Línea auxiliar = 129º 56’ + 180º = 309º 56’ ⇒ CAz Línea auxiliar = 309º 56’

Az (5-4) = CAz línea auxiliar – γ = 309º 56’ – 43º 06’ ⇒ Az (5-4) = 266º 50’

Rumbo (2-3) = 211º 38’ – 180º ⇒ Rumbo (2-3) = S 31º 38’ W ó N 31º 38’ E
Rumbo (5-4) = 266º 50’ – 180º ⇒ Rumbo (5-4) = S 86º 50’ W ó N 86º 50’ E

Entonces 1

Rumbo (2-3) = N 31º 38’ E ó S 31º 38’ W
Rumbo (5-4) = N 86º 50’ E ó S 86º 50’ W

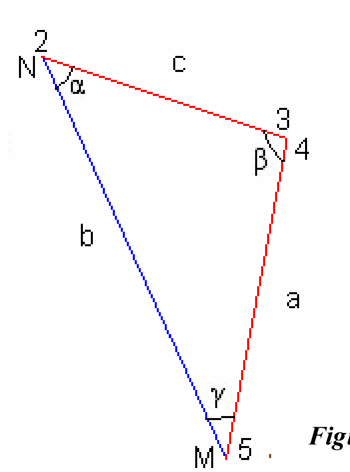


Figura 27

α = 81º 42’
β = 55º 12
γ = 43º 06’

Az Línea auxiliar = 129º 56’
Az (2-3) = Az Línea auxiliar – α = 129º 56’ – 81º 42’ ⇒ Az (2-3) = 48º 14’

CAz Línea auxiliar = 309º 56’
Az (5-4) = CAz Línea auxiliar + γ = 309º 56’ + 43º 06’ ⇒ Az (5-4) = 353º 02’

Rumbo (2-3) = N 48º 14’ E ó S 48º 14’ W
Rumbo (5-4) = 360º - 353º 02’ ⇒ Rumbo (5-4) = N 06º 58’ W ó S 06º 58’ E

Entonces 2

Rumbo (2-3) = N 48º 14’ E ó S 48º 14’ W
Rumbo (5-4) = N 06º 58’ W ó S 06º 58’ E

Las posibilidades para los rumbos de (2-3) y (5-4) son:

Rumbo (2-3)	
N 31º 38’ E	
S 31º 38’ W	Longitud (2-3) = 219.78
N 48º 14’ E	
S 48º 14’ W	

Rumbo (5-4)	
N 86º 50’ E	
S 86º 50’ W	Longitud (5-4) = 219.78
S 06º 58’ E	
N 06º 58’ W	

Analizando el cuadro de proyecciones podemos ver:

δ N.S = 169.52 (***ΣPr N*** $\rangle$ ***ΣPr S***)
δ E.W **=** -202.51 (***ΣPr W*** $\rangle$ ***ΣPr E***)

***PM*=** Distancia x cos R
PP= Distancia x sen R

$219.78 \times \cos 31º38' = 219.78 \times 0.8515 = \pm 187.12$
$219.78 \times \cos 48º14' = 219.78 \times 0.6661 = \pm 146.40$
$318.25 \times \cos 86º50' = 318.25 \times 0.0552 = \pm 17.57$
$318.25 \times \cos 06º58' = 318.25 \times 0.9926 = \pm 315.89$
Las posibilidades son:

+187.12 + 17.57 = +204.69
+187.12 + 315.89 = +503.01
+187.12 -17.57 = +169.55 (N y S)
+187.12 – 315.89 = -128.77
-187.12 + 17.57 = -169.55 (S y N)
-187.12 + 315.89 = +128.77
-187.12 -17.57 = -204.69
-187.12 – 315.89 = -128.77

δ N.S = 169.52 ≈ 169.55

Entonces -187.12 y +17.57 son obtenidos con los Rumbos (2-3) = S 31º 38’ W y Rumbo (4-5) = N 86º 50’ E

En definitiva:

Rumbo (2-3) = S 31º 38’ W
Rumbo (4-5) = N 86º 50’ E