PREÁMBULO

1

En este capítulo se hará un repaso de conceptos y elementos de álgebra, geometría, geometría analítica, trigonometría y escalas; para hacer más sencillo el entendimiento de los conceptos topográficos que se van a estudiar en el transcurso del libro.

Matemáticas usadas en topografía

Veamos ahora algunos axiomas, corolarios y fórmulas necesarios en los cálculos y ejercicios topográficos.

1.1 *GEOMETRIA*

El vocablo geometría, tiene sus orígenes en las raíces griegas, **geo** que significa tierra y **metría** que viene de **metrón** que significa medida, por lo tanto podemos inferir que la geometría es la ciencia de medir la tierra. Se dice también que la geometría es la parte de las matemáticas que trata de las propiedades y medidas de la extensión, estudiando la forma y dimensiones de las figuras geométricas.

- La ***extensión*** es la medida del espacio ocupada por un cuerpo.
- Una figura geométrica es un espacio cerrado por puntos, líneas o superficies.

Ahora veamos unos axiomas y corolarios muy importantes en geometría sobre líneas, ángulos, triángulos, polígonos y circunferencia.

1.1.1 El Punto

Solo tiene posición, no posee longitud, anchura, ni espesor. Es la unidad básica de todas las figuras (dimensión cero).

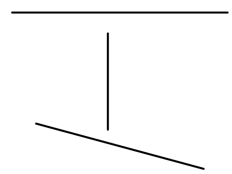
1.1.2 Líneas

Podemos concebir la línea como la huella que deja un punto en movimiento, teniendo longitud y dirección pero sin poseer anchura ni espesor (dimensión dos).

Existen varios tipos de líneas:
a) Línea recta:.líneas sin curvas
b) Línea curva: línea sin partes rectas.
c) Línea mixta: Posee partes rectas y partes curvas.
d) Línea quebrada: También llamada poligonal, es la que esta formada por segmentos de recta unidos por sus extremos.

También podemos clasificar las líneas de acuerdo con su posición:

- Línea horizontal
- Línea vertical
- Línea oblicua



Hablemos de las Rectas

- La recta es “ilimitada”, se considera prolongada indefinidamente.
- Dos rectas solo se cortan en un solo punto o son coincidentes.
- Dos rectas son paralelas si a pesar de prolongarlas indefinidamente nunca se llegan a cortar.
- Si dos rectas se cortan, sus perpendiculares también lo harán.
- La línea recta es la distancia más corta entre dos puntos.
- Una semirecta o rayo es una porción de recta que se forma cuando sobre una recta se traza un punto que la divide en dos semirectas.

Hablemos del Segmento

Se llama segmento al conjunto de puntos comprendidos entre dos puntos de una recta.

- Todo segmento tiene una longitud > 0.
- Dos segmentos son consecutivos si tienen un punto extremo en común.
- Dos segmentos son iguales si tienen la misma longitud.
- Dos segmentos son colíneales si se encuentran en la misma recta.
- Dos segmentos son adyacentes, si son colíneales y consecutivos al mismo tiempo.

1.1.3 Plano

Lo podemos entender como la huella que deja una línea al desplazarse, teniendo longitud y ancho, sin presentar espesor (dimensión dos). Un plano es aquel que puede contener una línea recta en toda su extensión.

Un plano con curvatura es una superficie

1.1.4 Espacio

Cuando desplazamos un plano se genera el espacio, en el que tenemos longitud, ancho y profundidad (dimensión tres)

1.1.5 Ángulos

Un ángulo es la intersección de dos rayos o semirrectas. Los rayos se llaman lados del ángulo y el punto de unión recibe el nombre de vértice.

Un ángulo se obtiene por la rotación de un rayo alrededor de su origen y lo podemos identificar por tres letras donde la del centro corresponde al vértice y las otras a puntos cualquiera de las semirrectas, también podemos identificarlos utilizando letras del alfabeto griego en su interior.

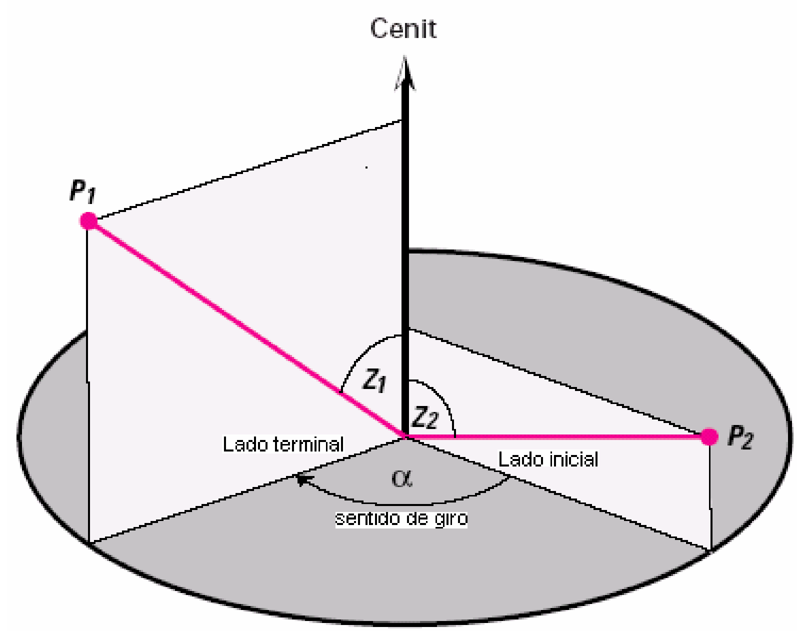


Figura 1

Existen cuatro elementos básicos que determinan un ángulo, estas son:

- Lado origen
- El sentido de giro
- Magnitud
- vértice

- Un ángulo recto es aquel que tiene sus lados perpendiculares entre sí, su medida es de 90°.
- Un ángulo agudo tiene una abertura menor a la de un ángulo recto, su medida está entre 0° y 90°.
- Un ángulo obtuso es aquel con una abertura mayor a la de un ángulo recto, su medida esta dada entre 90° y 180°.
- Un ángulo con una abertura de 180° es denominado ángulo llano, esta formado por semirrectas opuestas.
- Ángulos complementarios son aquellos cuya suma es igual a 90°.
- Ángulos suplementarios son los que cuya suma es igual 180°.
- Ángulos explementarios, son aquellos que sumados miden 360°.
- Alternos internos: Son los internos no adyacentes a diferente lado de la secante.
- Alternos externos: Son los externos no adyacentes a diferente lado de la secante.
- Los ángulos que comparten el vértice y uno de sus lados es común, y además sus lados no comunes son colíneales, reciben el nombre de ángulos adyacentes.
- Los ángulos congruentes son los que tienen la misma medida; al superponerlos coinciden sus lados.
- Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales o suplementarios.
- Dos ángulos son consecutivos si tienen un lado y el vértice en común.
- Dos ángulos que posee sus lados respectivamente paralelos, son iguales o suplementarios.
- Dos rectas que son cortadas por una secante, forman ocho ángulos que dos a dos se denominan: alternos externos, alternos internos, correspondientes y suplementarios.

- Correspondientes: uno interno y otro externo, no adyacentes al mismo lado de la secante
- Dos rectas que se cortan forma cuatro ángulos iguales, dos a dos que se llaman opuesto por el vértice.

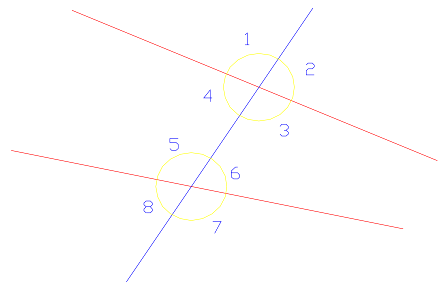


Figura 2

Opuestos por el vértice: *1 = 3, 2 = 4, 5 = 7, 6 = 8*

Correspondientes: *1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8*

Alternos internos: *4 y 6, 3 y 5*

Alternos externos: *1 y 7, 2 y 8*

Al cortar dos rectas paralelas, *r* y *s*, por otra recta secante *t (figura 3)* los ángulos que nombramos anteriormente son iguales dos a dos en el mismo orden que en los reglones anteriores:

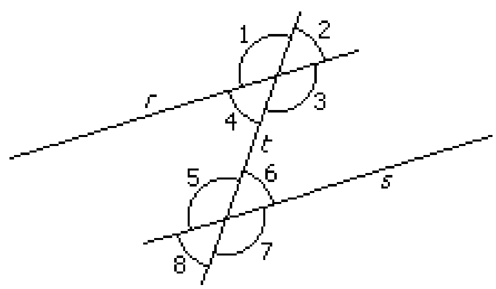


Figura 3

- La magnitud de un ángulo solo depende de la mayor o menor abertura de sus lados y no de la longitud de éstos.
- La línea que divide un ángulo en dos partes iguales se llama bisectriz.
- Dos ángulos iguales tienen complementos y suplementos iguales.

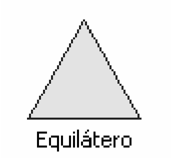
1.1.6 Triángulos

Es una figura geométrica que posee seis elementos; tres lados y tres ángulos.
Partes de un triángulo

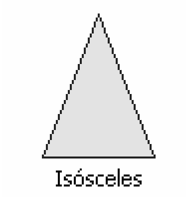
a) Lados: Son las líneas que lo limitan.
b) Vértices: son el lugar donde se unen los lados.

Los triángulos los podemos clasificar según sus ángulos o sus lados

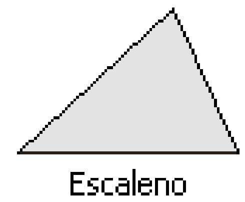
- Equilátero: Es aquel que tiene sus tres lados iguales.



- Isósceles: Es aquel que posee dos lados iguales.



- Escaleno: Es aquel en el que todos sus lados son desiguales.



Según sus ángulos

- *Triángulo rectángulo*: Es aquel que tiene su ángulo mayor recto o de 90°.
- *Triángulo acutángulo*: Es aquel en el que los tres ángulos son agudos.
- *Triangulo obtusángulo*: Es aquel que tiene su ángulo mayor obtuso o mayor de 90°.
- *Triangulo oblicuángulo*: Puede ser acutángulo u obtusángulo.
- *Triángulo equiángulo*: Este posee sus tres ángulos iguales.

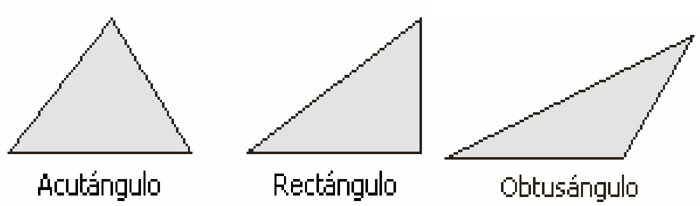


Figura 4

Estudiemos ahora los principios fundamentales sobre *congruencia* de triángulos

- Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados (L) y el ángulo (A) incluido de uno son respectivamente iguales al del otro. (LAL)
- Si un en un triangulo rectángulo los catetos son respectivamente congruentes a los catetos de otro triángulo rectángulo entonces estos son congruentes. (LAL).
- Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado incluido de uno es igual a los dos ángulos y el lado del otro triángulo. (ALA)

- Si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos agudos y su cateto adyacente son congruentes a los del otro triangulo rectángulo estos son congruentes entre sí. (ALA)
- Dos triángulos son congruentes si los lados de uno son iguales a los lados del otro triángulo. (LLL)
- Dos triángulos son congruentes si dos de sus ángulos y un lado de uno, son respectivamente congruentes a dos ángulos y un lado incluido del otro.(AAL)
- En un triangulo isósceles los ángulos de la base son iguales, siendo la base el lado de magnitud diferente.

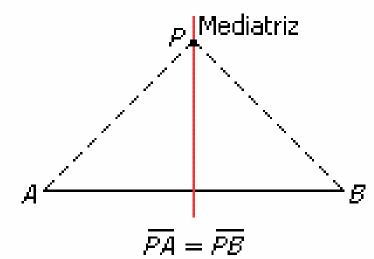


Figura 5

Mediatriz: Es la perpendicular que pasa por el punto medio de un lado en un triángulo. El punto de intersección de las mediatrices recibe el nombre de circuncentro.

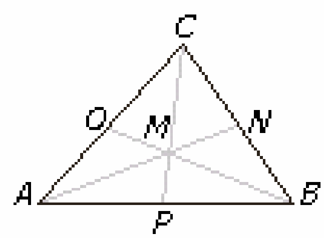


Figura 6

Mediana: Es el segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las medianas de un triángulo recibe el nombre de baricentro.

El *baricentro* corta las medianas en un punto situado a 2/3 de su longitud a partir del vértice.

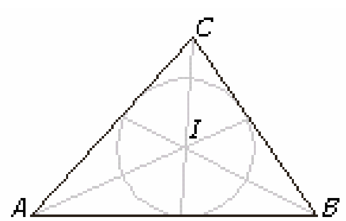


Figura 7

$$AM = \tfrac{2}{3} AN$$
$$BM = \tfrac{2}{3} BO$$
$$CM = \tfrac{2}{3} CP$$

Bisectriz: Es la recta notable que divide un ángulo interno en dos ángulos iguales. El punto de intersección de estas rectas recibe el nombre de incentro.

Altura: Se llama base de un triángulo a cualquiera de sus lados. El segmento perpendicular desde un vértice a la base opuesta o su prolongación se llama altura. Un triángulo tiene, pues, tres bases *a*, *b*, *c*, y tres alturas correspondientes, h_a, h_b y h_c.

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos en que la divide:

$h^2 = m \cdot n$

Esta relación se conoce como teorema de la altura
Las tres alturas de un triángulo (o sus prolongaciones) se cortan en

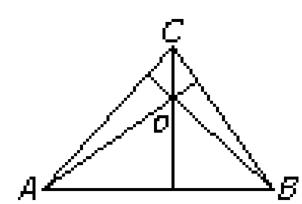


Figura 8

un punto llamado ortocentro. Si el triángulo es acutángulo, el ortocentro es interior.

En un triángulo rectángulo, cada cateto puede ser considerado como base y como altura. El ortocentro es, por tanto, el vértice del ángulo recto.

Si el triángulo es obtusángulo el ortocentro se obtiene, prolongando las alturas, fuera del triángulo. Figura 9.

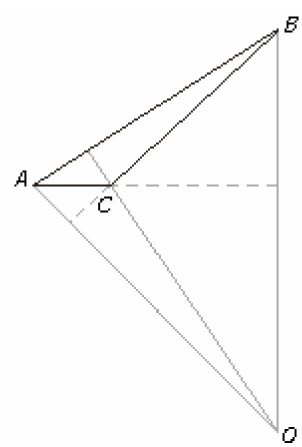


Figura 9

1.1.6.1 Propiedades de los ángulos de un triángulo

- En un triángulo isósceles la mediana trazada desde el ángulo formado por los lados iguales; es bisectriz, altura, mediatriz y mediana a mismo tiempo.
- La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º.
- La suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es igual a 360°.
- En los triángulos en general, se cumple que a mayor lado se opone un mayor ángulo, y a menor lado se opone un menor ángulo.
- En todo triángulo se cumple, que solo uno de sus ángulos puede ser recto u obtuso.
- Los ángulos agudos de un triangulo rectángulo son complementarios.
- La medida de cualquiera de los ángulos exteriores de un triangulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interno no adyacentes a él.
- En un triangulo cualquiera, uno de sus lados sea el que sea es menor que la suma de los otros dos lados y mayor a su diferencia.

Una propiedad especial del triángulo

- La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado y su medida es la mitad de éste.

Hablemos de la semejanza de triángulos

- Dos triángulos en los cuales sus tres ángulos sean congruentes entre sí, son iguales o semejantes.
- Si dos triángulos poseen ángulos respectivamente iguales son semejantes.
- Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo congruente comprendido por lados proporcionales.

- Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados homólogos proporcionales.

1.1.7 Cuadriláteros

Figura de cuatro lados; Son cuadriláteros: los paralelogramos, cuadrados, rombos, rectángulos y trapecios.

- Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos iguales y paralelos, como lo son el cuadrado, el rombo, y el rectángulo.
- Las diagonales de un paralelogramo se bisecan y dividen el paralelogramo en dos triángulos congruentes, igual sucede en el rombo, el cuadrado y el rectángulo.
- En el cuadrado todos los ángulos y los lados son iguales.
- En el rectángulo los ángulos son iguales y su medida es de 90°, los lados opuestos son iguales.

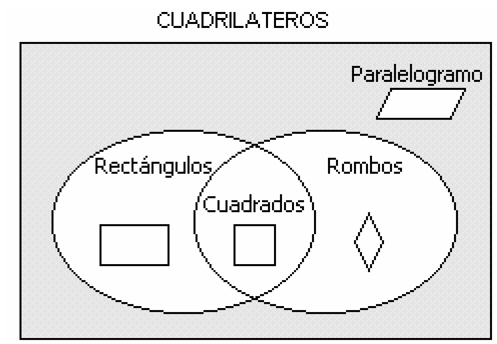


Figura 10

- En el rombo, los cuatro lados son iguales y sus ángulos opuestos son iguales (dos de ellos mayores de 90°).
- Las diagonales de un rombo se cortan formando un ángulo recto.

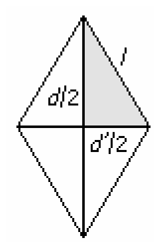


Figura 11

- En el paralelogramo los lados opuestos son paralelos e iguales y sus ángulos opuestos son iguales

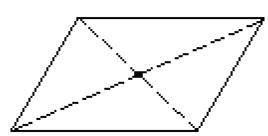


Figura 12

- En los paralelogramos dos ángulos consecutivos son suplementarios.
- Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.

- En el trapecio la altura es la separación entre las bases.

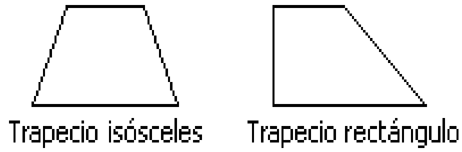


Figura 13

- La paralela a las bases de un trapecio trazada por el punto medio de uno de los lados no paralelos es igual a la semisuma de las bases.(base media)

1.1.8 Polígonos

Polígono es una figura plana que esta formada por los lados y los puntos que unen dichos lados.

- La *diagonal* de un polígono es un segmento que une dos vértices no adyacentes.
- Existen polígonos regulares, irregulares, convexos, no convexos o estrellados.
- *Polígono regular* es aquel que tiene sus ángulos y sus lados iguales.

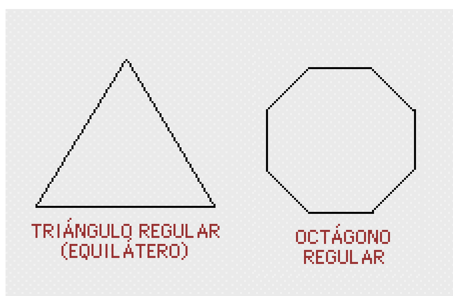


Figura 14

- *Polígono convexo* es aquel que tiene por lo menos un ángulo interno mayor de 180°.
- *Polígono no convexo* es aquel en el que sus ángulos internos son menores de 180°.
- Ángulo de deflexión de un polígono es aquel que se forma por uno de sus lados y la prolongación del inmediatamente anterior.

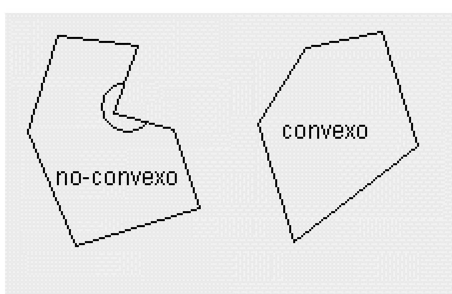
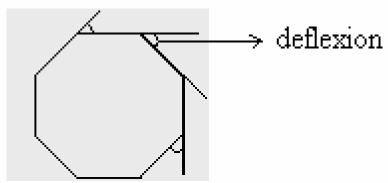


Figura 15

- La suma de los ángulos de *deflexión* de un polígono es de 360°.



- *Polígono estrellado* es en el que dos o más de sus lados se cursan. *Ver figura.*

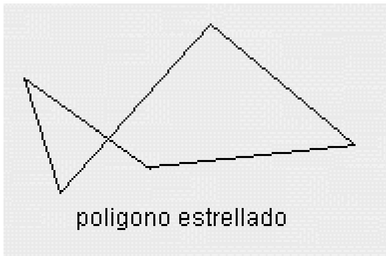


Figura 16

- El ángulo de deflexión es suplementario al ángulo interior adyacente.
- La suma de los *ángulos internos* de un polígono es igual a (n-2)180°, n es el número de vértices.
- La suma de los *ángulos externos* de un polígono es igual a (n+2) 180°.
- Un vértice solo puede tener dos segmentos de recta de un polígono.
- El perímetro de un polígono es igual a la suma de las magnitudes de sus lados.

1.1.9 Circunferencia

Curva plana cerrada en la que cada uno de sus puntos equidista de un punto interior fijo, llamado centro de la circunferencia. No se debe confundir con el círculo (superficie), aunque ambos conceptos están estrechamente relacionados. La circunferencia pertenece a la clase de curvas conocidas como cónicas, pues una circunferencia se puede definir como la intersección de una superficie cónica con un plano perpendicular a su eje.

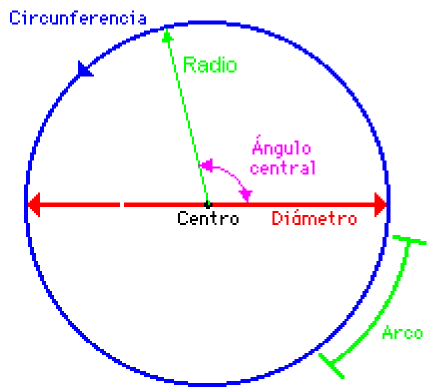


Figura 17

Cualquier segmento rectilíneo que pasa por el centro y cuyos extremos están en la circunferencia se denomina diámetro. Un radio es un segmento que va desde el centro hasta la circunferencia. Una cuerda es un segmento rectilíneo cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia. Un arco de circunferencia es la parte de ésta delimitada por dos puntos. Angulo en el centro es aquel cuyo vértice es el centro de circunferencia y cuyos lados son dos radios. El centro de la circunferencia es centro de simetría, y cualquier diámetro es eje de simetría. Una semicircunferencia es cada una de las partes determinadas por el diámetro. Un sector circular es una porción de círculo determinada por dos radios y un arco. El semicírculo es una porción de círculo limitada por la semicircunferencia.

La corona circular es figura plana comprendida entre dos círculos concéntricos.

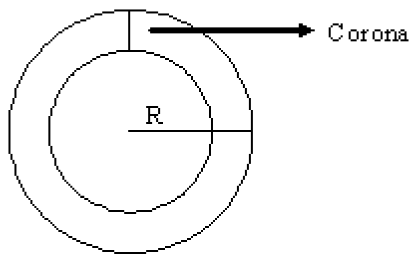
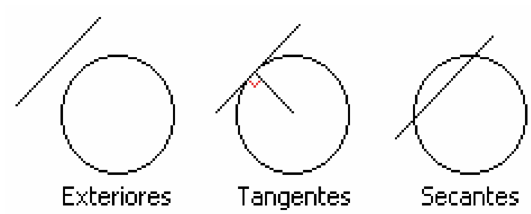


Figura 18

1.1.9.1 Posiciones Relativas de una Recta y una Circunferencia

Una recta y una circunferencia pueden ser exteriores, si no se cortan (no tienen ningún punto en común), tangentes si sólo se tocan en un punto (punto de tangencia), y secantes si tienen dos puntos comunes.

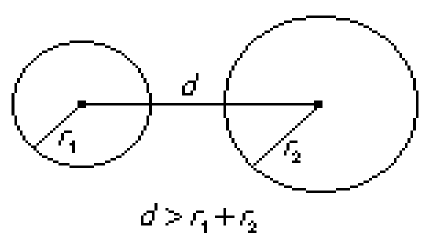


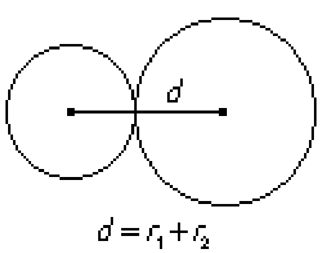
Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el centro con el punto de tangencia.

1.1.9.2 Posiciones Relativas de dos Circunferencias

Dos circunferencias también pueden no tocarse, ser tangentes o ser secantes, según tengan ninguno, uno o dos puntos comunes, respectivamente. Sin embargo, se pueden precisar más las posiciones relativas de dos circunferencias según la distancia entre sus centros, *d*, y las longitudes de sus radios, r_1 y r_2:

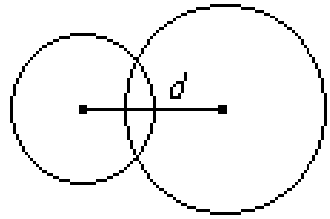
- *Exteriores*: si no tienen puntos comunes y la distancia entre sus centros es mayor que la suma de sus radios.



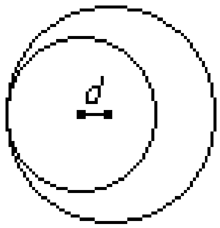


- *Tangentes exteriores*: si tienen un punto común y la distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios.

- *Secantes*: si tienen dos puntos comunes.



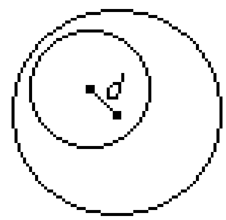
$r_2 - r_1 < d < r_1 + r_2$



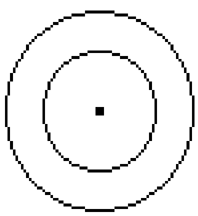
$d = r_2 - r_1$

- *Tangentes interiores*: si tienen un punto común y la distancia entre sus centros es igual a la diferencia de sus radios.

- Interior una a la otra: si no tienen ningún punto común y la distancia entre sus centros es menor que la diferencia de sus radios.



$d < r_2 - r_1$



$d = 0$

- Concéntricas: si tienen el mismo centro.

Además:

- Dos circunferencias solo se cortan en dos puntos no lo hacen en más.
- Por tres puntos que no se encuentren colíneales (línea recta), se puede hacer pasar una circunferencia.
- Cuando dos circunferencias son secantes, la línea que une los centros es perpendicular a la cuerda común en su punto medio.
- Todo radio perpendicular a una cuerda la biseca, lo mismo que al arco que ésta subtiende.
- En un circulo o en círculos iguales, dos ángulos iguales en el centro comprenden arcos iguales; a mayor ángulo mayor arco. También cuerdas iguales subtienden ángulos iguales.

1.1.9.3 Circunferencias y Polígonos

La circunferencia inscrita en un polígono regular es la que tiene su centro en el del polígono y es tangente a todos sus lados. Su radio es igual a la apotema[11] del polígono.

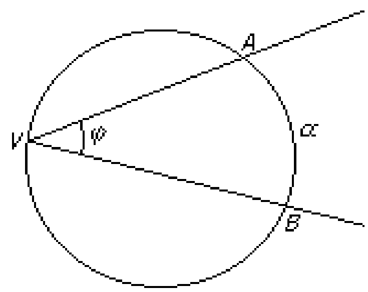
[1] Apotema: perpendicular trazada desde el centro de un poligono regular a uno cualquiera de sus lados

Los triángulos, aunque no sean regulares, tienen siempre circunferencia inscrita (tangente a sus tres lados) y circunscrita (que pasa por sus tres vértices).

1.1.9.4 Ángulos en la Circunferencia

Un ángulo central de una circunferencia es el que tiene su vértice en el centro de ésta. La medida de un ángulo central es igual a la del arco que abarca.

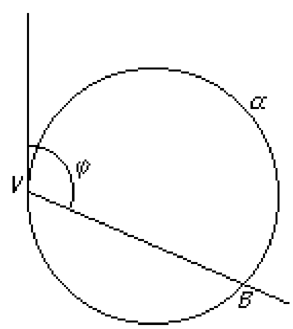
Un ángulo inscrito en una circunferencia es aquel cuyo vértice está sobre ella y cuyos lados la cortan en sendos puntos. La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la del arco que abarca.



$\varphi = \alpha/2$

Figura 19

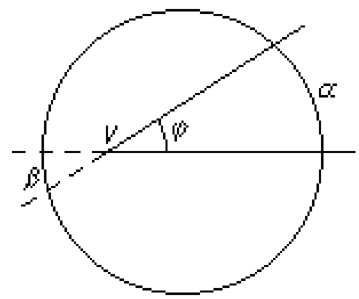
Un ángulo seminscrito en una circunferencia es aquel cuyo vértice, *V*, está sobre ella, uno de sus lados la corta y el otro es tangente en *V*. La medida de un ángulo seminscrito es la mitad de la del arco que abarca.



$\varphi = \alpha/2$

Figura 20

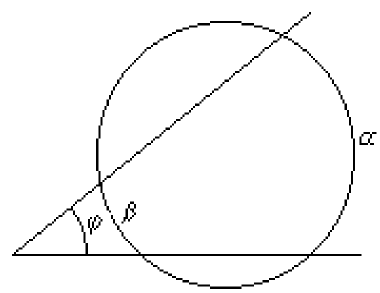
En una circunferencia, un ángulo interior es el que tiene su vértice en el interior de la misma. Su medida es la mitad de la suma de la medida del arco que abarcan sus lados con el arco que abarcan sus prolongaciones.



$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Figura 21

Un ángulo exterior a una circunferencia es el que tiene su vértice en el exterior de la misma. Su medida es la semidiferencia de los dos arcos que abarcan sus lados sobre la circunferencia.



$$\varphi = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Figura 22

1.1.10 Áreas

Es la superficie comprendida dentro de un perímetro. Podemos definirla también como la extensión de una superficie.

Tabla 1 (libro topografía plana de Leonardo casanova)

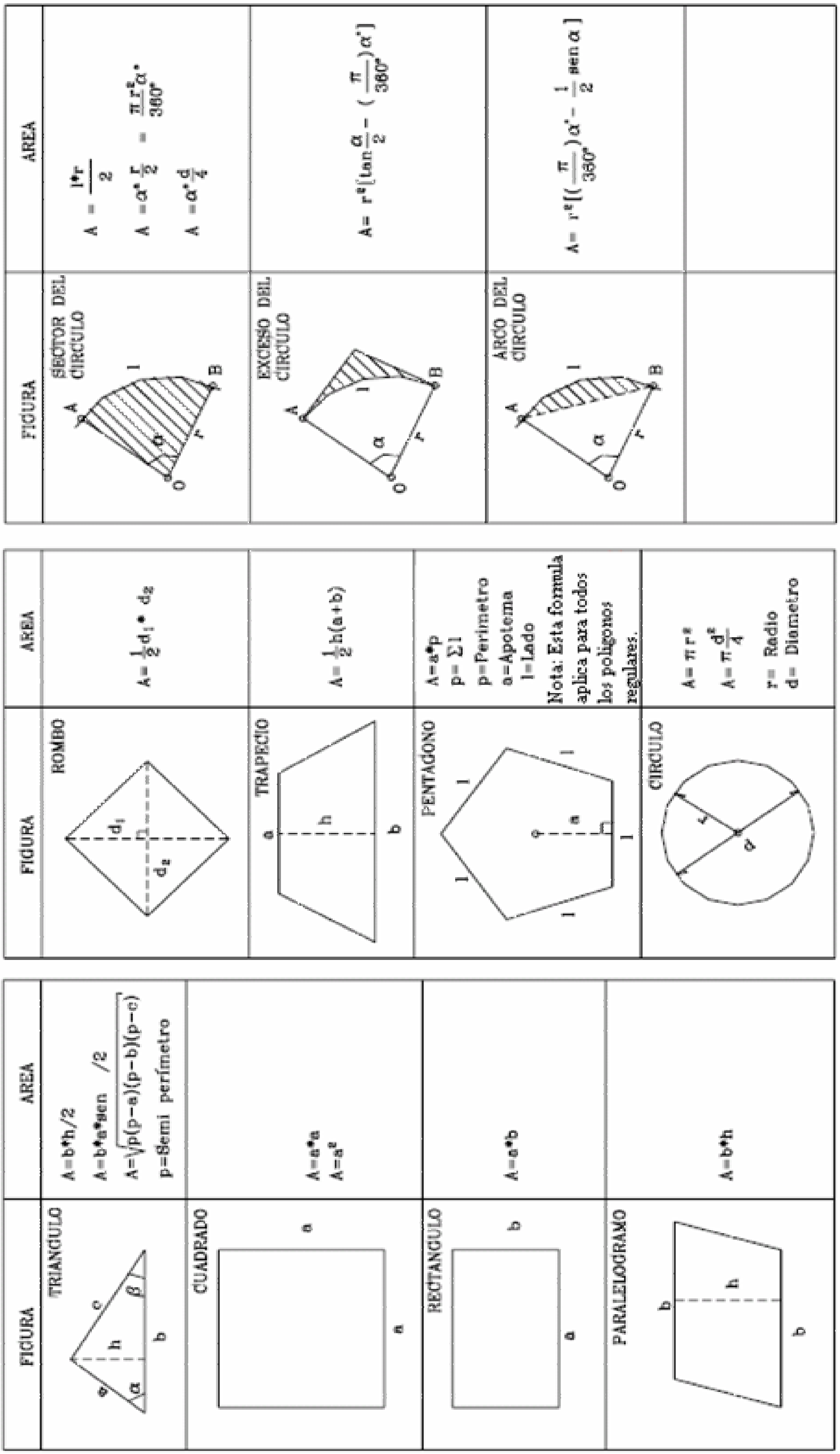


FIGURA	AREA
TRIANGULO	A=b*h/2 A=b*a*sen /2 $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ p=Semi perímetro
CUADRADO	A=a*a $A=a^2$
RECTANGULO	A=a*b
PARALELOGRAMO	A=b*h
ROMBO	$A=\frac{1}{2}d_1 * d_2$
TRAPECIO	$A=\frac{1}{2}h(a+b)$
PENTAGONO	A=a*p $p=\Sigma l$ p=Perimetro a=Apotema l=Lado Nota: Esta formula aplica para todos los poligonos regulares.
CIRCULO	$A=\pi r^2$ $A=\pi \frac{d^2}{4}$ r= Radio d= Diametro
SECTOR DEL CIRCULO	$A = \frac{l*r}{2}$ $A = \alpha^{\circ} \frac{r}{2} = \frac{\pi r^2}{360^{\circ}}\alpha^{\circ}$ $A = \alpha^{\circ} \frac{d}{4}$
EXCESO DEL CIRCULO	$A= r^2[\tan\frac{\alpha}{2} - (\frac{\pi}{360^{\circ}})\alpha^{\circ}]$
ARCO DEL CIRCULO	$A= r^2[(\frac{\pi}{360^{\circ}})\alpha^{\circ} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha]$

1.2 *ÁLGEBRA*

Ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones

1.2.1 Ecuación de primer grado

La ecuación de primer grado también conocida como ecuación lineal es la siguiente:

AX + BY + C = 0

Donde A y B son los coeficientes des las variables X y Y, siendo C el termino independiente

Otra forma de presentar este tipo de función es:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{B}{C}$ Donde conociendo un valor de x se puede conocer su correspondiente en y.

1.2.2 Función Cuadrática

Es el segundo tipo de función algebraica y esta definido por una ecuación de segundo grado.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.
Resolución de Ecuaciones Cuadráticas

Para resolver una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática, existen métodos gráficos que no son tan precisos. Por tal razón se utilizan métodos como el de descomposición en factores, el cual tiene el inconveniente de no poderse utilizar en todas las ocasiones; encontrándose un método mas practico para darle solución a una ecuación de segundo grado este recibe el nombre de ecuación cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veamos a continuación como darle solución a un sistema de 2 ecuaciones simultáneas.

También para darle solución a un problema de este tipo existen diferentes métodos como:

- Método de reducción
- Método de sustitución
- Método de igualación
- Método de determinantes

En este capitulo solo trataremos el método de determinantes por ser un método practico y muy preciso a la hora de dar solución a un sistema de ecuaciones simultaneas.

El método de determinantes consiste en formar matrices con los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes de la siguiente forma:

Ax + By = C
Dx + Ey = F

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C & B \\ F & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}} = \frac{CE - BF}{AE - BD} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ D & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}} = \frac{AF - CD}{AE - BD}$$

Este método también lo podemos emplear para sistemas de tres ecuaciones simultáneas de la siguiente forma:

Ax + By + Cz = D
Ex + Fy + Gz = H
Ix + Jy + Kj = L

1.3 *GEOMETRÍA ANALÍTICA*

Rama de la geometría en la que las propiedades de las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas (ecuaciones). Se suele llamar geometría cartesiana a la geometría analítica.

La geometría analítica se ocupa de dos tipos clásicos de problemas. El primero es: dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos. El segundo tipo de problema es: dada una expresión algebraica, describir en términos geométricos el lugar geométrico de los puntos que cumplen dicha expresión. Por ejemplo, una circunferencia de radio 3 y con su centro en el origen es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen $x^2 + y^2 = 9$.

Sistema de coordenadas cartesiano

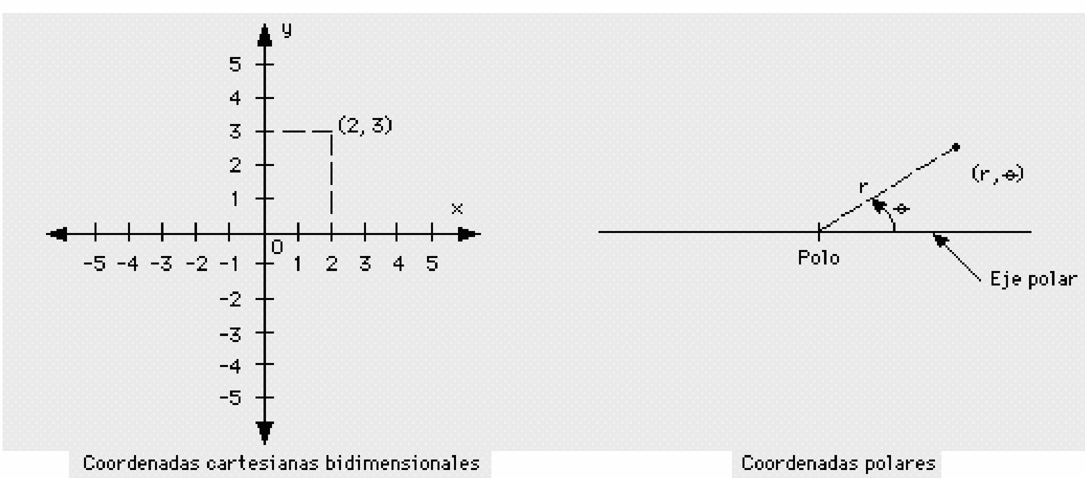


Figura 23

En matemáticas se utiliza este sistema para dar la posición de un punto en un plano. Que es un arreglo de rectas reales que llamamos ejes, uno de estos se considera el primario y el otro es el secundario, dicho ejes se interceptan en un punto al que denominamos origen de coordenadas (0,0), separando los valores positivos y negativos en cada eje.

En este sistema la dirección de una línea se da por medio de un ángulo medido del eje primario al secundario que recibe el nombre de pendiente.

1.3.1 Coordenadas polares

Sistema para especificar la situación de un punto refiriéndolo a un ángulo y a una distancia desde un punto fijo que se denomina polo y la distancia al punto dado se llama radio vector; el ángulo indica la posición del radio vector con relación a la línea inicial.

Para escribir las coordenadas en sistema polar de cualquier punto, se escribe primero la distancia (D) y luego el ángulo (θ) encerrados entre paréntesis y separados por una coma como lo podemos apreciar en el ejemplo siguiente:

(D , θ) (4 , 90°) o en la siguiente forma para expresarlo en radianes (4 , π/2)

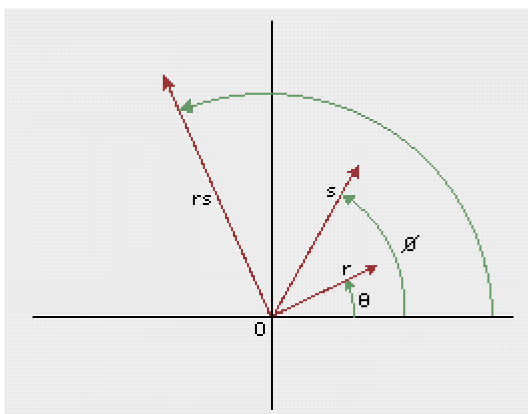


Figura 24

1.3.2 Coordenadas cartesianas

Un caso especial de coordenadas cartesianas utiliza como sistema de referencia, es el del sistema de ejes *ortogonales*, también llamados sistema de ejes coordenados rectangulares. Existiendo un eje primario (x) y un eje secundario (y).

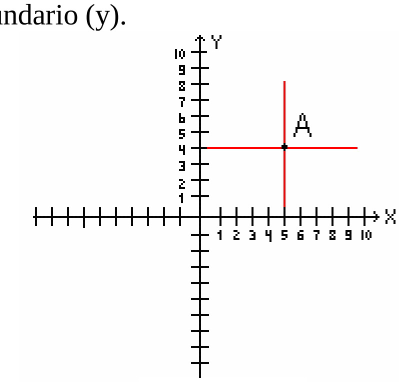


Figura 25

En la grafica anterior podemos ver los dos ejes ortogonales, el eje de las X o eje de las abscisas y el eje de las Y o eje de las ordenadas.

Cuando vamos a dar la posición de un punto debemos tener en cuenta que cualquier punto del plano se puede localizar con respecto a un par de ejes dando las distancias del punto a cada uno de los ejes (abscisa, ordenada). Así si quisiéramos localizar un punto lo que tendríamos que ser, es contar en el eje de las x en numero de unidades que indica la abscisa y por este punto trazar una línea paralela al eje de las y, luego contar la unidades determinadas por la ordenada y trazar una línea paralela al eje x por dicho punto. En la figura 1, el punto *A* (5,4).

TABLA DE SIGNO DE LOS CUADRANTES		
CUADRANTE	ABSCISA	ORDENADA
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

En el caso de topografía se trabaja con un sistema NE donde el eje que aparece de primero es el eje primario, en el cual los cuadrantes están nombrados conservando el sentido del eje primario al secundario. En el sistema europeo se trabaja como YX

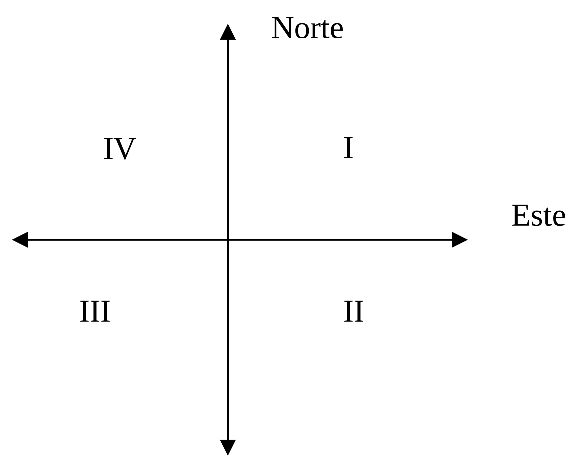


Figura 26

Ya en éste sistema las coordenadas se escriben (N,E) y la dirección de una línea no se da a través de la pendiente sino de un azimut (Az); medido a partir del eje de las nortes en sentido de las manecillas del reloj.

1.3.2.1 Distancia entre dos puntos

Para conocer la distancia entre dos puntos, de los cuales conocemos sus coordenadas empleamos la siguiente formula:

En el sistema X,Y

$$\text{Distancia} = \sqrt{(Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2}$$

En el sistema Norte – Este

$$\text{Distancia} = \sqrt{(N_2 - N_1)^2 + (E_2 - E_1)^2}$$

1.3.2.2 Relación entre sistema Polar y Rectangular

El sistema polar y rectangular se encuentran relacionados por las siguientes formulas que permiten conocer la proyección de una línea sobre los ejes empleando el ángulo que hace con el eje primario y la longitud de la línea de referencia.

X(AB) = AB cos α
PM(AB) = AB cos Az

Y(AB) = AB sen α
PP(AB) = AB sen Az

X(AB) y Y(AB) son las proyecciones en el sistema coordenado XY.
PM(AB) y PP(AB) son las proyecciones en el sistema coordenado NE.

La dirección de la línea se determina mediante la fórmula:

α = arc tan {Y(AB) / X(AB)}

Az = arc tan {PP(AB) / PM(AB)}

En esta formula se debe tener en cuenta los signos:

$$numerador > 0 \Rightarrow E$$
$$numerador < 0 \Rightarrow W$$

$$deno\min ador > 0 \Rightarrow N$$
$$deno\min ador < 0 \Rightarrow S$$

$$\frac{+}{+} = NE \qquad \frac{-}{+} = SE \qquad \frac{-}{-} = SW \qquad \frac{+}{-} = NW$$

NOTA: Cuando empleamos las coordenadas para calcular la dirección de una línea es muy común que se cometa el error de confundir el sentido en que se pretende hacerlo, presentándose problemas en el reemplazo de las variables en la fórmula, por ejemplo:

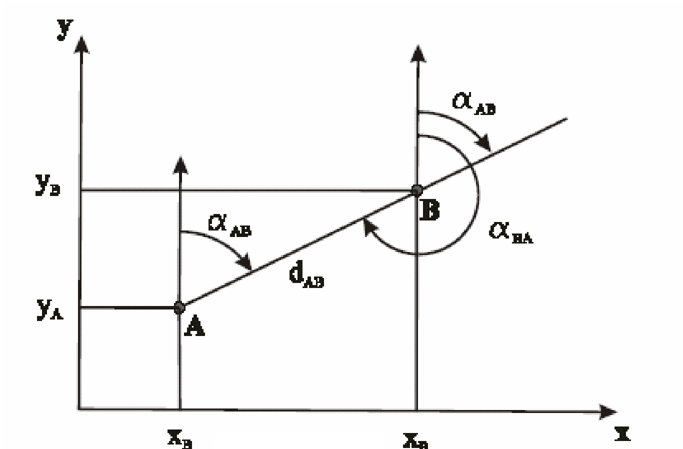


Figura 27

Si pretendemos calcular la dirección (A;B), se reemplaza en la formula de la siguiente forma:

$$\alpha = \text{arc tan}\,\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

Si pretendemos calcular la dirección (B;A), el reemplazo sería de la siguiente forma:

$$\alpha = \text{arc tan}\,\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}$$

1.3.3 La Línea Recta

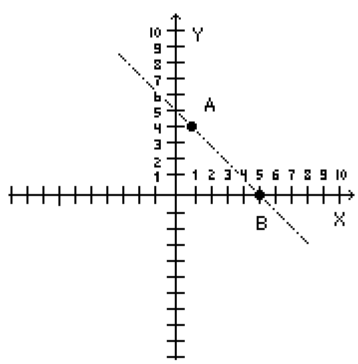


Figura 28

En general, una línea recta se puede representar siempre utilizando una ecuación lineal en dos variables, *x* e *y,* de la forma A*x* + B*y* + C = 0. Siguiendo con el ejemplo anterior, todos los puntos que pertenecen a la línea recta que pasa por *A* y *B* cumplen la ecuación lineal *x*+*y* = 5; en general, *A**x* + B*y* = -C.

Casos especiales:

- Si A=0, la ecuación se convierte en BY + C = 0 y la gráfica es una recta paralela al eje X.

- Si B= 0, se tiene que AX +C = 0 y su grafica es una recta que corta al eje X y es paralela al eje Y.
- Si C= 0, la ecuación queda AX +BY = 0, y la gráfica es la de una recta que pasa por el punto origen.

Cuando la línea está representada por la ecuación $y = -\frac{A}{B}x - \frac{B}{C}$

El segundo término es una cantidad constante, correspondiendo en la ecuación a las unidades en el eje de las ordenadas de una recta que pasa por el origen aumentadas o disminuidas en C/B según el signo que posea este termino.

La pendiente de una línea la podemos definir como la tangente que la línea forma con el eje de las X tomando el ángulo en sentido horario y se puede calcular empleando la siguiente formula:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

Para encontrar la ecuación que pase por dos puntos determinados podemos emplear

$$Y_2 - Y_1 = m\,(X_2 - X_1) \quad \text{Ecuación Punto-Pendiente}$$

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (1,4) y el punto B (5,0).

$$m = \frac{0-4}{5-1} \quad \Rightarrow \quad m = -1$$

$$Y_2 - Y_1 = m\,(X_2 - X_1) \quad \Rightarrow \quad Y_2 - 4 = -1\,(X_2 - 1) \quad \Rightarrow \quad Y = -X + 1 + 4 \quad \Rightarrow$$

Y = –X + 5

La forma punto – punto: la ecuación de la recta que pasa por $P_1(X_1,Y_1)$ y $P_2(X_2,Y_2)$ esta dada por el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Si desarrollamos la determinante de los elementos de su primera fila obtenemos:

$$X\,(Y_1 - Y_2) - Y(X_1 - X_2) + (X_1Y_2 - X_2Y_1) = 0$$

Que es equivalente a

$$(Y - Y_1)(X_2 - X_1) - (X - X_1)(Y_2 - Y_1) = 0$$

y, si $X_2 - X_1 \neq 0$, es equivalente a la ecuación punto – pendiente. Si $X_1 = X_2$, entonces ha de ser verdadero que $Y_1 - Y_2 \neq 0$, en consecuencia, la ecuación punto-punto se reduce a $X=X_1$ que es una ecuación de una recta vertical.

1.3.3.1 Posiciones Relativas de dos rectas

- Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

$$m_1 = m_2 \quad \text{ó} \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{ó} \quad Az_1 = Az_2$$

- Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a –1.

$$m_1 m_2 = -1 \ \text{ó} \quad \mathrm{Tan}\ \alpha_1 \ \mathrm{Tan}\ \alpha_2 = -1 \quad \text{ó} \quad \mathrm{Tan}\ Az_1 \ \mathrm{Tan}\ Az_2 = -1$$

- Dos rectas coinciden si tienen la misma pendiente y en común el intercepto con el eje Y.

1.3.3.2 Angulo entre Líneas

Para determinar el ángulo que existe entre líneas que se interceptan, se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\mathrm{Tan}\ \theta = \frac{\mathrm{Tan}\ \alpha_2 - \mathrm{Tan}\ \alpha_1}{1 + \mathrm{Tan}\ \alpha_1 \times \mathrm{Tan}\ \alpha_2} \qquad \mathrm{Tan}\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 - m_2}$$

1.3.4 LAS CONICAS

Se les denomina cónica debido a que se forman cuando un cono es cortado por planos en distintas posiciones. Un conjunto de puntos se dicen que son de una cónica, si satisfacen una propiedad geométrica (la distancia de uno de ellos a un punto fijo es proporcional a la distancia del punto a la línea fija).

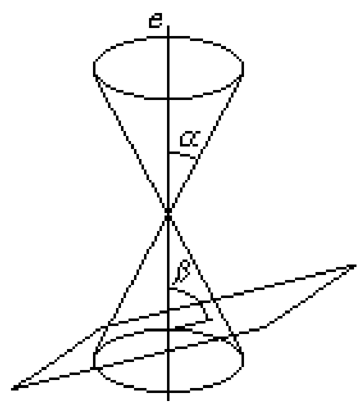


Figura 29

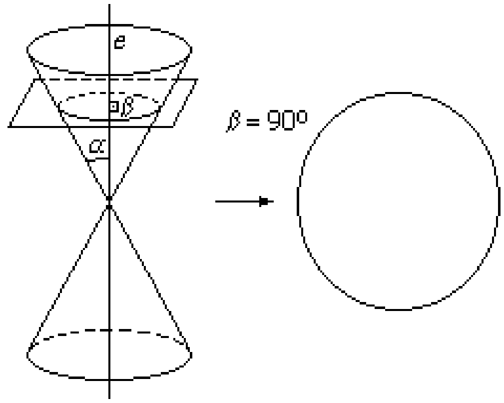
1.3.4.1 Circunferencia

Es el lugar geométrico de los puntos (x,y) de un plano que cumplen la condición geométrica de estar a la misma distancia de un punto llamado centro y su ecuación es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{con centro en coordenadas } (h,k)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{cuando el centro esta en (0,0)}$$

Si β = 90º la intersección del plano con la superficie cónica es una circunferencia.



1.3.4.2 Elipse

Figura 30

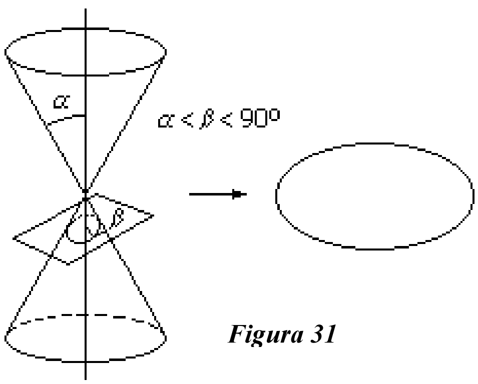


Figura 31

Es el conjunto de puntos (x, y) cuya suma de las distancias a dos puntos fijos distintos (focos) es constante, o sea igual. La recta que une los focos y que corta a la elipse en dos punto (vértices) se llama eje mayor y su punto medio es el centro de la elipse la línea perpendicular a el eje mayor que pasa por el centro es el eje menor:

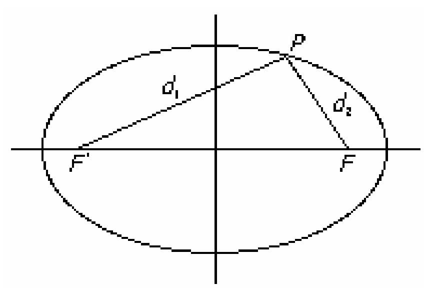


Figura 32

d1 + d2 = *K*

La ecuación general de una elipse, con centro en (h,k) y ejes mayor y menor de longitudes 2a y 2b , donde a > b, es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ El eje mayor es horizontal

En éste los focos se encuentran a c unidades del centro, con $c^2 = a^2 - b^2$

Si se sitúan los ejes ordenados del siguiente modo: el eje *X* coincidiendo con el eje mayor de la elipse y el eje *Y* coincidiendo con el eje menor, la ecuación de la elipse adopta la forma siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1.3.4.3 Parábola

La parábola se puede definir como el lugar geométrico de los puntos (x,y) del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco, y de una recta fija llamada directriz.

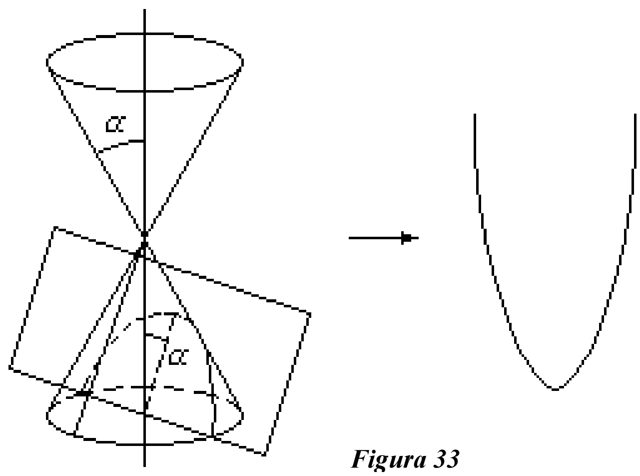


Figura 33

Además del foco, *F*, y de la directriz, *d*, en una parábola destacan los siguientes elementos:

- Eje, *e*.
  Vértice, *V*.
- Distancia de *F* a *d*, *p*.

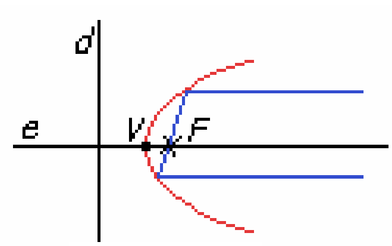


Figura 34

La parábola no tiene asíntotas. Su excentricidad es, siempre, 1.

Si un rayo es paralelo al eje de la parábola, se refleja en ésta pasando por su foco. Y, viceversa, si pasa por su foco, se refleja en la parábola y se aleja paralelo al eje.

Veamos ahora la ecuación de la parábola

$$(y - k)^2 = 4a\,(x - h) \quad \text{con centro en } (h,k)$$

Con el eje paralelo a x y abierta a la derecha Foco = (a + h, k)

Abierta a la Izquierda

$$(y - k)^2 = -4a\,(x - h)$$

Foco = (h – a, k)

Abierta Arriba

$$(x - h)^2 = 4a\,(y - k) \quad \text{con centro en } (h,k) \text{ y el eje paralelo a y.}$$

Foco = (h, k + a)

Abierta Abajo

$$(x - h)^2 = -4a\,(y - k)$$

Foco = (h. k – a)

Con Centro en el origen

$Y^2 = 4aX$, foco en (a, 0)
$Y^2 = -4aX$, foco en (–a, 0)
$X^2 = 4aY$, foco en (0, a)
$X^2 = -4aY$, foco en (0, –a)

1.3.5 Coordenadas en el espacio[2]

1.3.5.1 Cartesianas

A los ejes coordenados utilizados en geometría plana se les adiciona un tercer eje Z perpendicular a los dos iniciales, concurriendo dichos ejes en un punto que es tomado como origen de coordenadas.

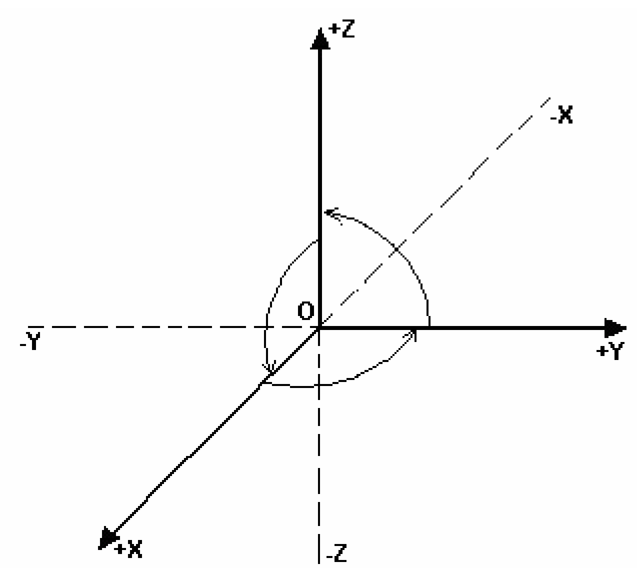


Figura 35 Perspectiva caballera del sistema tridimensional

Cada dos ejes forman un plano que se denomina plano de coordenadas y se designa por las letras que representan los ejes que lo conforman, de esta manera los planos serán XY, YZ, ZX, donde para cada uno existe un eje primario que esta dado por la primera letra o para el caso de topografía aunque son NE, EH y HN.

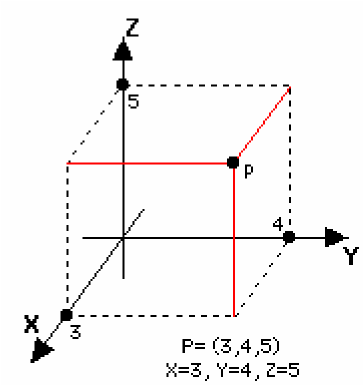
Tenemos pues que el espacio quedara dividido en ocho octantes

Para dar la posición de un punto en el espacio se emplean entonces tres coordenadas determinadas que son (X, Y, Z) y recíprocamente ningún otro punto puede tener las mismas tres coordenadas. *Ver fig 35 .*

[2] Tema Extraído del libro Matemáticas para Ingenieros y Técnicos. R. Doerfling

1.3.5.1.1 Distancia entre dos puntos

Al igual que en el plano es posible Para conocer la distancia entre dos puntos por medio de sus coordenadas Aplicando:



$$Dist. = \sqrt{(Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

Figura 36

1.3.5.2 Coordenadas Polares en el espacio

La situación de un punto en el espacio con relación a los tres ejes coordenados rectangulares puede definirse también por las siguientes magnitudes: radio vector, o distancia r entre el punto y el origen de coordenadas, el ángulo φ que es vertical formado con el eje Z y el ángulo horizontal α que la proyección del radio formada en el plano X,Y hace con el eje de las X, así pues estos tres valores se denominan coordenadas polares en el espacio y se escriben (α, φ, r).

Para señalar todos los puntos del espacio se necesita para α toda la graduación desde 0º a 360º, para el ángulo φ tan solo de 0º a 180º y para r todos los valores desde 0 hasta ∞.
En estas coordenadas (o) es el polo, (ox) el eje polar y (oz) el eje del polo.

La relación entre las coordenadas polares y las rectangulares de un punto en el espacio se deducen de la figura 26 y son:

$$x = rsen\varphi \cos\alpha \qquad y = rsen\varphi sen\alpha \qquad z = r\cos\varphi$$

Recíprocamente teniendo en cuenta los signos de X,Y,Z

$$r = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad \cos\varphi = \frac{Z}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{X}{+\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$sen\alpha = \frac{Y}{+\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

1.3.5.3 Ecuación General del plano

Todo plano que se encuentre en el espacio quedara perfectamente definido por medio de la siguiente ecuación:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Donde A, By C son constantes; X,Y y Z son variables y D es el termino independiente que nos indica las unidades que el plano esta por encima o por debajo del origen.
Observemos unos casos especiales de las ecuaciones del plano:

- A=0 entonces la ecuación queda By + Cz + D = 0, así la normal al plano y el eje X serán perpendiculares por lo tanto el plano será paralelo a dicho eje.

- B=0 la ecuación queda Ax + Cz + D = 0; la normal al plano y el eje Y serán perpendiculares y el plano por ende será paralelo al eje Y.

- C=0 tenemos que Ax + By + D = 0, donde la normal al plano queda perpendicular al eje Z y el plano por tal razón será paralelo a este eje.

- D=0 la ecuación queda definida como Ax + By + Cz = 0 y representa a un plano que pasa por el origen.

- Si son dos los coeficientes que están nulos ya se A, B o C, o sea el plano será paralelo al plano formado por los dos ejes que faltan en la ecuación; esto quiere decir que el plano será perpendicular al eje correspondiente a la coordenada que queda en la ecuación.

1.3.5.4 Ecuación de una línea en el espacio

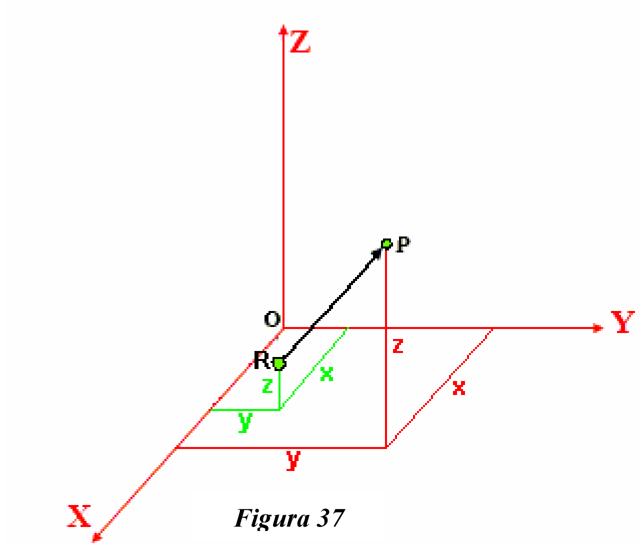


Figura 37

Una línea en el espacio esta definida por la propiedad geométrica de que dos planos se cortan según una recta nos dicen que dos ecuaciones de primer grado en (x,y,z) determinan una recta en el espacio.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

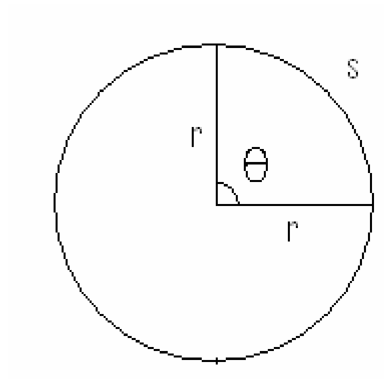
Donde ***A***, ***B***, ***C*** y ***D*** son 4 números reales fijos

Cada una de estas ecuaciones representa un plano, luego los valores de las coordenadas (x,y,z) que satisfagan simultáneamente a las dos ecuaciones corresponderán a puntos comunes a los dos planos, es decir a la recta de intersección de los mismos.

1.4 *TRIGONOMETRÍA PLANA*

Rama de la matemática que estudia las propiedades y aplicaciones de las funciones circulares o trigonométricas.

1.4.1 Longitud de Arco



En una circunferencia de radio (R) un ángulo central θ radianes determina un arco de longitud (s), el cual podemos calcular:

$$s = r\,\theta$$

1.4.2 Funciones Trigonométricas

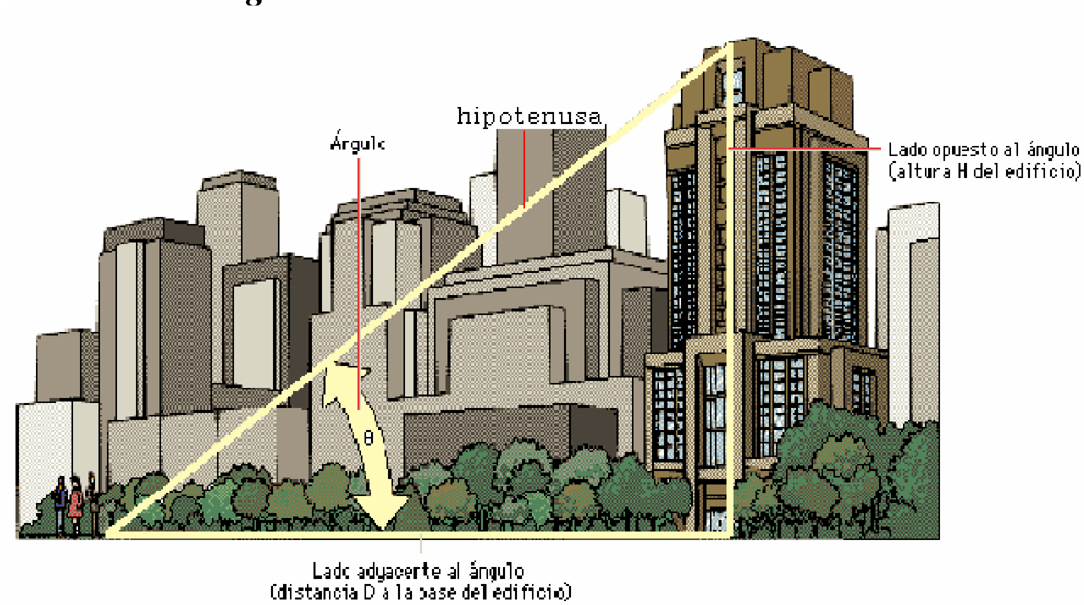
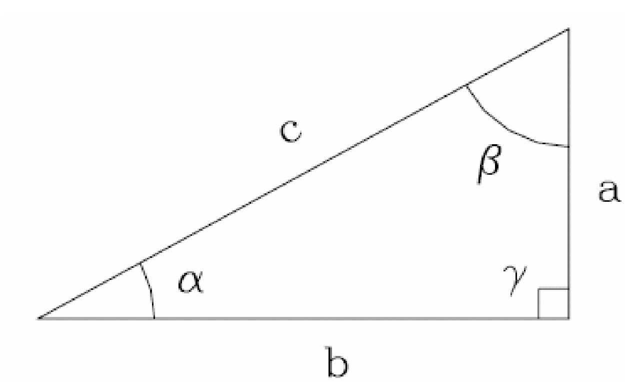


Figura 38



Las funciones trigonométricas, son relaciones que existen entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo; las cuales son: seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan) que son las básicas

Para comenzar a hablar de estas veamos primero el teorema de Pitágoras, el cual nos dice que la magnitud de su hipotenusa, (lado más largo), al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de sus otros lados.

c = hipotenusa
a= cateto opuesto $\quad c^2 = a^2 + b^2$
b= cateto adyacente

1.4.2.1 Función seno

Como vemos en el grafico al comienzo de la pagina, dado el ángulo θ del triangulo se puede decir que el seno de este es igual a la razón entre su lado opuesto y la hipotenusa del triángulo

$$sen\theta = \frac{a}{c}$$

1.4.2.2 Función coseno

Para el caso del mismo grafico, el coseno del ángulo θ es igual a la razón de su lado adyacente con la hipotenusa del triángulo

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

1.4.2.3 Función tangente

La tangente del ángulo θ, es igual a la razón del lado opuesto con el lado adyacente del triangulo

$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

Existen otras funciones como lo son la función cotangente que es el inverso multiplicativo de la función tangente, la función secante que es el inverso multiplicativo del coseno y la función cosecante que es el inverso de la función seno.

Signo de las funciones trigonométricas de acuerdo al cuadrante

cuadrante / función	I	II	III	IV
senθ	+	+	-	-
cosθ	+	-	-	+
tanθ	+	-	+	-
cotθ	+	-	+	-
secθ	+	-	-	+
cscθ	+	+	-	-

NOTA: Es de gran importancia mencionar que la anterior tabla nos muestra los signos de acuerdo a la disposición de los cuadrantes para las matemáticas, pero en topografía la disposición es diferente los cuadrantes están numerados en sentido horario a diferencia que en las matemáticas lo están en sentido contra-horario, por tal motivo los signos cambian un poco, quedando de la siguiente forma

cuadrante / función	NE	SE	SW	NW
senθ	+	+	-	-
cosθ	+	-	-	+
tanθ	+	-	+	-
cotθ	+	-	+	-
secθ	+	-	-	+
cscθ	+	+	-	-

1.4.3 Ley de senos

En todo triángulo los lados son proporcionales al seno del ángulo opuesto

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

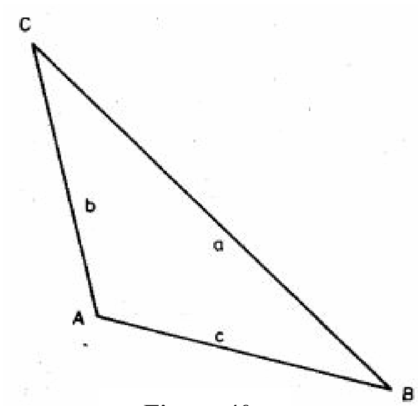


Figura 40

1.4.4 Ley de cósenos

En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\cos A$$

En todo triangulo se cumple también que el coseno de cualquier ángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados que loa forman menos el cuadrado del lado opuesto, sobre el doble producto de los lados que forman el ángulo.

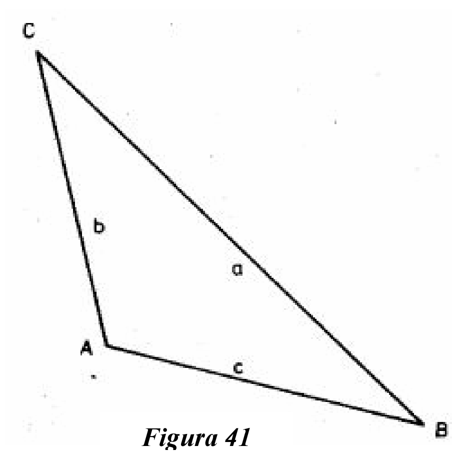


Figura 41

1.4.5 Identidades trigonométricas básicas

Veamos algunas de las identidades trigonométricas esenciales para el topógrafo

$$\sec(\chi) = \frac{1}{\cos(\chi)} \qquad \csc(\chi) = \frac{1}{sen(\chi)}$$

$$\tan(\chi) = \frac{\sin(\chi)}{\cos(\chi)} \qquad \cot(\chi) = \frac{1}{\tan(\chi)}$$

1.4.5.1 Ángulos opuestos

$$sen(-\chi) = -sen(\chi) \qquad \cos(-\chi) = \cos(\chi)$$

$$\tan(-\chi) = -\tan(\chi) \qquad \cot(-\chi) = -\cot(\chi)$$

$$asen\chi + b\cos\chi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot sen(\chi - \varphi) \ \ ; \quad \varphi = -\arctan({}^{b}\!/\!{}_{a})$$

1.4.5.2 Teorema de Pitágoras

$$sen^2(\chi) + \cos^2(\chi) = 1$$

$$\tan^2(\chi) + 1 = \sec^2(\chi)$$

$$\cot^2(\chi) + 1 = \csc^2(\chi)$$

1.4.5.3 Identidades de suma de ángulos

$$\sin(\chi \pm y) = \sin(\chi)\cos(y) \pm \cos(\chi)\sin(y)$$

$$\cos(\chi \pm y) = \cos(\chi)\cos(y) \mp \sin(\chi)\sin(y)$$

$$\tan(\chi \pm y) = \frac{\tan(\chi) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(\chi)\tan(y)}$$

1.4.5.4 Identidades para ángulos complementarios

$$\begin{gathered}
\sin(90 - \chi) = \cos(\chi) \\
\cos(90 - \chi) = \sin(\chi) \\
\tan(90 - \chi) = \cot(\chi) \\
\csc(90 - \chi) = \sec(\chi) \\
\sec(90 - \chi) = -\csc(\chi) \\
\cot(90 - \chi) = \tan(\chi)
\end{gathered}$$

1.5 *ESCALAS*

Se denomina escala (E) a la relación constante que existe entre una longitud que es medida en un plano y su correspondiente longitud medida en el terreno. Matemáticamente se puede expresar con la siguiente fórmula:

$$E = P/T$$

Las escalas pueden ser de reducción o de ampliación las escalas de ampliación nos permiten dibujar objetos pequeños para verlos de mayor tamaño, y las escalas de reducción nos permiten llevar objetos grandes a tamaños mas pequeños ya sea en dibujos o en maquetas.

Un ejemplo de una escala de ampliación es 3cm = 0.00001m o 1/0.0003 = 3333/1

Existen dos tipos de escalas, numérica o gráfica

Escala numérica: Para este tipo de escala existen dos clases: la escala verbal que presenta unidades como 1cm = 1Km y la escala fraccionaria que no presenta unidades.

Escala verbal: Es la escala en donde se emplean las unidades para especificar, la relación que se presenta entre las medidas realizadas en el terreno y sus correspondientes dibujadas en el plano, ejemplos:

2cm : 10m
1in :1M
1cm : 7.50m

Escalas fraccionarias: Es aquella que se representa por medio de una fracción, que tiene como numerador una unidad, los ejemplos de ésta son 1/1000, 1/200, 1/3300. Estas escalas se pueden leer como una unidad medida en el plano representa D unidades en el terreno.

$$E = 1/D$$

Igualando las dos razones que se tiene hasta el momento de escala se puede expresar de la siguiente manera:

$$1/D = P/T$$

Donde

P = unidades medidas en el plano

T = unidades medidas en el terreno

D = denominador de la escala

Nota 1: Para que una escala verbal pueda se utilizada en cálculos se debe transformar dicha escala a una de tipo fraccionaria, haciendo uso del método de conversión de unidades:

Eje:

1cm : 33m

Para eliminar las unidades debemos convertir los 33m a centímetros así:

$$33\cancel{m} \times \frac{100\text{cm}}{1\cancel{m}} = \quad 3300\text{cm}$$

Quedando de esta forma que la escala verbal es igual a:

1cm : 3300cm por lo tanto la escala fraccionaria es 1/ 3300

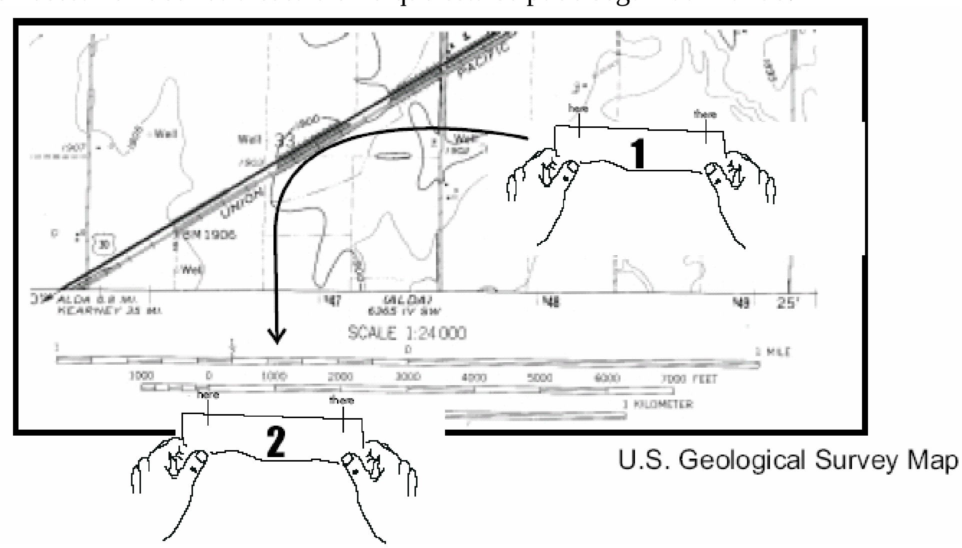
Nota 2: para pasar una escala de ampliación a una forma fraccionaria solo se debe aplicar la formula general de escala, por ejemplo si tomamos la escala con la que se dio él ejemplo de escalas de ampliación (3cm = 0.00001m) y queremos expresarla en forma fraccionaria debemos hacer:

$$1/D = P/T \implies 1/D = 3\text{cm}/\ 0.00001\text{m} \implies D = \frac{0.00001\text{m}}{3\text{cm}}$$

Como no se pueden operar cantidades de diferente unidad se debe convertir los 0.00001m a cm y luego realizar la operación.

$$D = \frac{0.001\cancel{cm}}{3\cancel{cm}} = 0.0003$$ Quedando la escala fraccionaria así: 3333/1

Escalas graficas: La escala gráfica es una línea recta dividida en tramos que corresponden a cierto número de unidades de longitud en el terreno. Estas escalas nos son muy útiles ya que nos permiten conocer la longitud de una línea en un plano directamente sin tener que aplicar fórmulas como las que se vieron anteriormente y además cuando se reduce o se amplia un plano la escala grafica sufre el mismo cambio o variación. quiere decir que se conserva la relación del plano y el terreno Siendo a si, no es necesario hacer otra escala sino que ésta se pude seguir utilizando.



Muestra el empleo de las escalas graficas en cartografía y topografía

Construcción de escalas: El proceso de construcción de una escala grafica es simple; utilizando la formula $T = P \times D$ se calcula la longitud que en el papel representa un número adecuado de metros o de kilómetros, de acuerdo con la magnitud de la escala que se este construyendo.

Ejemplo: Dibujar la escala grafica correspondiente a la escala numérica 1: 100.000, sobre una línea de 11cm

$$T = P \times D \qquad P = T/D = \frac{1000m \times 1000cm/1m}{1000.000} = 1cm$$

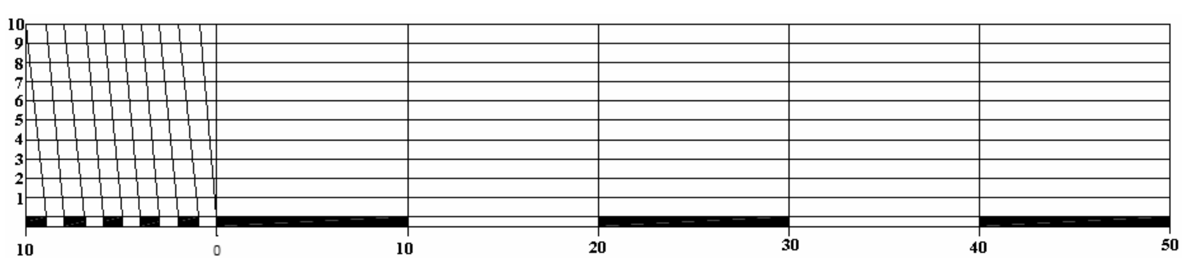
Con esto ya se sabe que 1cm en el papel representa 1Km del terreno.

En el momento de dibujar la escala se deja 1cm a la izquierda para dibujar lo que se denomina como cabeza o talón, que es una fracción de la escala que se encuentra dividida en partes más pequeñas que el cuerpo de 10cm como lo vemos en la figura

Muestra la escala grafica de 1:100.000

Escalas diagonales: Es un tipo de escala grafica que por la características de su construcción nos permiten medir subdivisiones de la unidad mas pequeña de la escala, con una precisión considerable. Para comprender mejor miremos el siguiente ejemplo.

Supongamos que tenemos un plano a escala 1/500, y queremos construir un a escala que además de permitirnos medir los metros, nos de la posibilidad de medir las décimas de metro; lo que se tiene que hacer es trazar una línea base del cuerpo en escala 1:500 que nos represente 50m y un talón de 10m que para esta escala seria dos centímetros a la izquierda. Luego se trazan una líneas perpendiculares a cada división de la línea base (cuerpo y talón), éstas líneas también con una magnitud de 10m, el paso siguiente es dibujar una paralelas a la línea base que crucen las líneas perpendiculares cada metro como vemos en la figura x. como ya se dijo la parte del talón debe ir en fracciones mas pequeñas de la escala para este caso lo dividiremos cada metro, tanto en la línea de la base como en la línea superior y las numeramos en la forma que se ve en el grafico; ésta divisiones comienzan a ser unidas dos a dos por medio de diagonales, quedando unidas en



Esta forma la división cero de la base con la división uno de la línea superior, la división uno de la base con la dos de la línea superior.
El fundamento de estas escalas es que al trazar las diagonales en el talón, lo que estamos generando son triángulos semejantes con las líneas paralelas a la base, que hacen que si se bajaran líneas perpendiculares a la base que pasen por el punto de corte, dividirían los segmentos de él talón exactamente en decímetros ver grafico anterior.