Manual de Estática

Gustavo Jaramillo Botero
Ingeniero civil
Especialista en estructuras

EDICION DE PRUEBA

2019

Capítulo 1
Estática de Partículas

1.1 Introducción

La estática de partículas estudia el equilibrio de un cuerpo cuando está sometido a diferentes fuerzas, todas ellas aplicadas en un mismo punto.

La fuerzas que se aplican en un mismo punto se pueden reemplazar por una fuerza equivalente, denominada resultante**,** para ello se pueden utilizar las propiedades de los vectores.

1.2 Fuerza sobre una partícula.

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su punto de aplicación, su magnitud, su dirección y sentido. Pero las fuerzas sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación.

La magnitud de una fuerza se caracteriza por cierto número de unidades, en el sistema métrico decimal (mks) se usa el kilogramo fuerza (kgf), en el sistema internacional (SI) se usa el Newton (N) y su múltiplo el kilonewton (kN), igual a 1000 N, mientras que en el sistema ingles se usa la libra (lb) y su múltiplo la kilolibra (kip), igual a 1000 lb.

La línea de acción de la fuerza es la línea recta infinita a lo largo de la cual la fuerza actúa, la fuerza en sí se representa con una parte de esa línea. El sentido de la fuerza debe indicarse con una flecha, y la dirección se indica con el ángulo que forma la fuerza con respecto a un eje fijo.

Las fuerzas se pueden representar como vectores que poseen magnitud, dirección y sentido, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo.

1.3 Resultante de varias fuerzas concurrentes.

Cuando todas las fuerzas pasan por el punto **o**, se denominan concurrentes. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre **o** pueden sumarse con la regla del polígono.

El vector **R** representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen sobre el punto **o**.

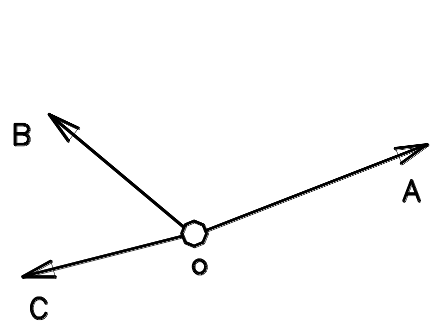


Fig a Fuerzas concurrentes

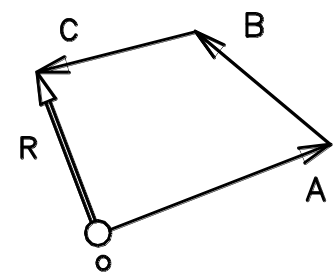


Fig b Suma de vectores

1.4 Descomposición de una fuerza en sus componentes.

Cuando dos o más fuerzas actúan sobre una partícula, pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto. De la misma manera, una sola fuerza que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas, el mismo efecto sobre la partícula. A estas fuerzas se les llama componentes rectangulares.

Para encontrar las componentes rectangulares se utilizan las propiedades trigonométricas de los triángulos rectángulos.

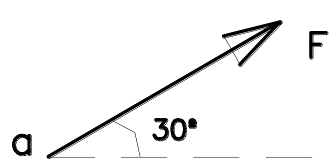


Fig a Fuerza inclinada

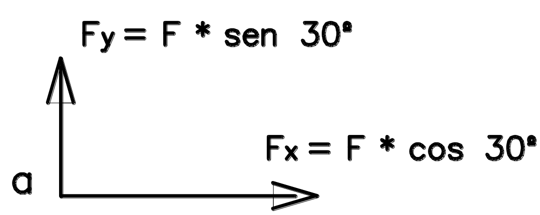


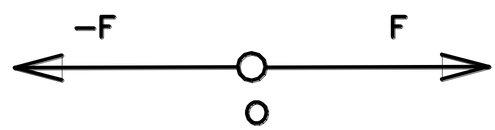
Fig b Componentes rectangulares

1.5 Equilibrio de una partícula.

El equilibrio de una partícula se presenta cuando la resultante de las fuerzas es cero, en este caso el efecto sobre la partícula es cero. Lo anterior se concluye con el siguiente enunciado:

Si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio.

Una partícula sujeta a la acción de dos fuerzas estará en equilibrio si ambas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.



Las condiciones de equilibrio de una partícula se expresan mediante la siguiente ecuación:

La sumatoria de todas las fuerzas es igual a cero.

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

Si las fuerzas se descomponen en sus componentes rectangulares, la ecuación se escribe para cada componente.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

1.6 Diagrama de cuerpo libre.

Para resolver problemas de equilibrio, se debe trazar un diagrama de cuerpo libre; éste consiste en un diagrama que muestra la estructura y todas las fuerzas que actúan sobre ella.

Para mayor facilidad en la solución de los problemas de equilibrio, en el diagrama de cuerpo libre se trazan las componentes rectangulares de cada fuerza.

Cuando una partícula está sometida a dos fuerzas, el problema puede resolverse mediante un triángulo de fuerzas. Si la partícula está sometida a dos o más fuerzas, el problema se puede resolverse utilizando las ecuaciones de equilibrio:

Cuando las fuerzas están en el **espacio**, se hallan sus componentes a lo largo de los ejes X, Y, Z . La primera condición de equilibrio queda de la siguiente forma:

$$\Sigma Fx = 0 \qquad \Sigma Fy = 0 \qquad \Sigma Fz = 0$$

Para resolver los problemas sobre equilibrio de fuerzas concurrentes, se debe seguir los siguientes pasos:

a) Trazar un diagrama de cuerpo libre.

b) Descomponer todas las fuerzas en componentes rectangulares.

c) Aplicar las ecuaciones de equilibrio.

d) Resolver algebraicamente el sistema de ecuaciones.

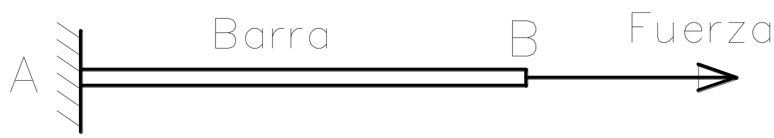
Si alguna barra o fuerza no tiene indicado el sentido, este se le debe asumir. Si en la respuesta, la fuerza de estas barras es negativa, indica que la dirección verdadera es contraria a la asumida.

1.7 Barras a tensión y a compresión.

Cuando una barra está sometida a fuerzas axiales, se presentan dos estados de fuerzas internas: Tensión o compresión.

a) Barras a tensión: El estado de tensión en una barra se presenta cuando ésta se estira debido a la fuerza aplicada. Se reconoce cuando la dirección del vector fuerza, sale del nudo. Cuando no se conoce esta dirección se puede asumir, en caso del resultado positivo, indica que la dirección esta bien asumida.

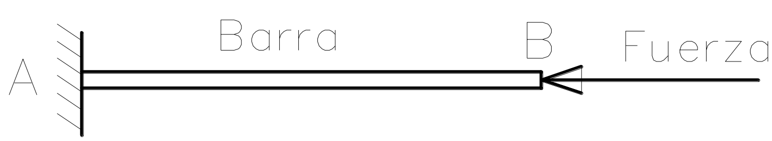
En la siguiente figura se indica el estado de tensión.



Barra a tensión

b) Barras a Compresión: El estado de compresión en una barra se presenta cuando ésta se comprime debido a la fuerza aplicada. Se reconoce cuando la dirección del vector fuerza, entra al nudo. Cuando no se conoce esta dirección se puede asumir, en caso del resultado positivo, indica que la dirección esta bien asumida.

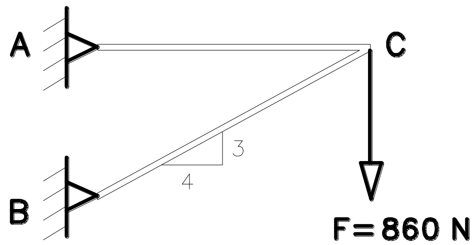
En la siguiente figura se indica el estado de compresión.



Barra a compresión

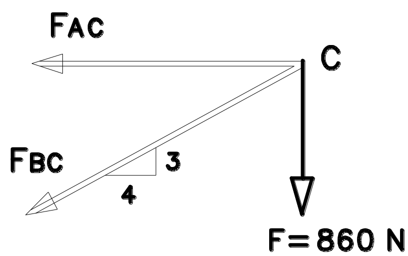
Ejemplo 1.1

Determinar las fuerzas en las barras **AC** y **BC** de la estructura mostrada en la figura. Indicar si las barras están en tensión o en compresión.



Solución:

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre, el sentido de las barras es asumido.



Se encuentran las componentes rectangulares de F_{BC}, para esto se usa las propiedades de los triángulos semejantes.

La hipotenusa del triangulo es: $h=\sqrt{4^2 + 3^2}$ ⇨ $h= \sqrt{25}$ ⇨ $h= 5$

Utilizando las propiedades de triangulo semejantes se obtiene:

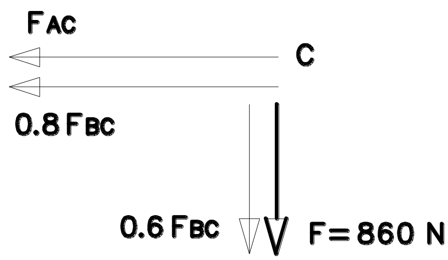
La componente en <u>x</u> es:

$$\frac{F_{BC}}{5} = \frac{F_x}{4} \quad \Rightarrow \quad F_x = 0{,}8\, F_{BC}$$

La componente en <u>y</u> es:

$$\frac{F_{BC}}{5} = \frac{F_y}{3} \quad \Rightarrow \quad F_y = 0{,}6\, F_{BC}$$

Las componentes rectangulares quedan de la siguiente manera:



Se hace la sumatoria de fuerzas y se obtiene:

Σ Fx = 0

$-F_{AC} - 0{,}8\ F_{BC} = 0$ (1)

Σ Fy = 0

$-0{,}6\ F_{BC} - 860\ N = 0$ (2)

De la ecuación (2) se obtiene:

$-0{,}6\ F_{BC} = 860\ N$

F_{BC} = -1.433,33 N (compresión)

Reemplazando en la ecuación (1) se obtiene:

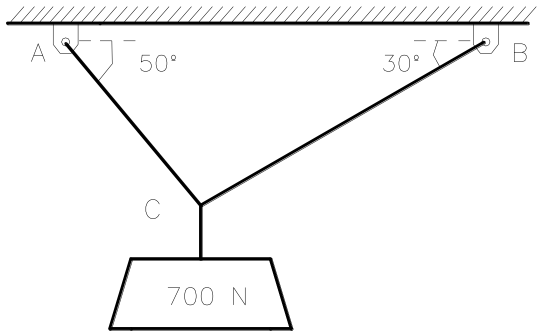
$-F_{AC} - 0{,}8\ (-1.433{,}33) = 0$

$-F_{AC} + 1.146{,}66 = 0$ $\Rightarrow$ **F_{AC} = 1.146,66 N (tensión)**

La fuerza **AC** es positiva, lo cual indica que el sentido está bien asumido, es decir, la fuerza está a tensión. La fuerza **BC** es negativa, lo cual indica que el sentido es contrario al asumido, es decir, la fuerza está a compresión.

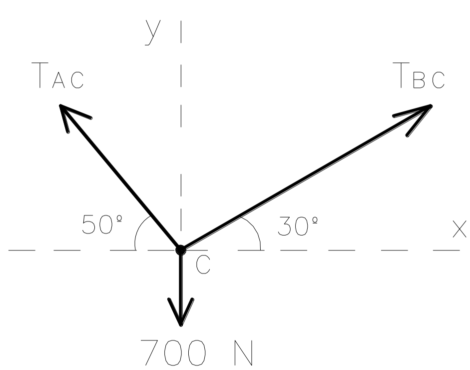
Ejemplo 1.2

Dos cables se amarran juntos en el punto *C* y se cargan como se indica en la figura. Determinar las tensiones en *AC* y *BC*.



Solución:

Se hace el diagrama de cuerpo libre para el nudo *C*, ya que todas las fuerzas pasan por él. Los cables solo trabajan a tensión, por lo tanto salen del nudo *C*.



La sumatoria de fuerzas horizontales es:

$\sum F_X=0$ ⇨ $-T_{AC} * \cos 50^o + T_{BC} * \cos 30^o = 0$

$- 0{,}6427\ T_{AC} + 0{,}8660\ T_{BC} = 0$ (ecuación 1)

La sumatoria de fuerzas verticales es:

$\sum Fy=0$ ⇨ T_{AC} * sen 50º + T_{BC} * sen 30º = 0

0,7660 T_{AC} + 0,50 T_{BC} – 700 N = 0

0,7660 T_{AC} + 0,50 T_{BC} = 700 N (ecuación 2)

Se resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, por el método de la reducción.

- 0,6427 T_{AC} + 0,8660 T_{BC} = 0 (ecuación 1)

0,7660 T_{AC} + 0,50 T_{BC} = 700 N (ecuación 2)

La ecuación 1 se multiplica por 0,7660 y la ecuación 2 se multiplica por 0,6427

- 0,6427 T_{AC} + 0,8660 T_{BC} = 0 * 0,7660 = -0,4923 T_{AC} + 0,663 T_{BC} = 0

0,7660 T_{AC} + 0,50 T_{BC}= 700 N * 0,6427 = 0,4923 T_{AC} + 0,3215 T_{BC}= 449,89

Se suman las dos ecuaciones resultantes:

-0,4923 T_{AC} + 0,663 T_{BC} = 0

0,4923 T_{AC} + 0,3215 T_{BC}= 449,89 N

----

0 + 0,9845 T_{BC} = 449,89 N

Despejando T_{BC} se obtiene:

$$T_{BC} = \frac{449{,}89\ N}{0{,}9845} \quad ⇨ \quad T_{BC} = 456{,}97\ N \quad \text{(tensión)}$$

Reemplazando en la ecuación 1, se obtiene:

- 0,6427 T_{AC} + 0,8660 T_{BC} = 0 (ecuación 1)
- 0,6427 T_{AC} + 0,8660 (456,97 N) = 0
- 0,6427 T_{AC} + 395,74 N = 0 ⇨ - 0,6427 T_{AC} = - 395,74 N

T_{AC} = - 395,74 N / - 0,6427 ⇨ T_{AC} = 615,74 N (tensión)

Capítulo 2
Equilibrio de Cuerpos Rígidos

2.1 Introducción.

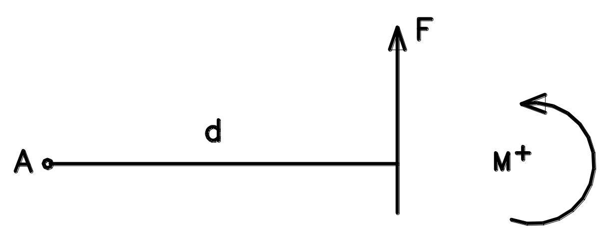
La estática de cuerpos rígidos estudia los cuerpos cuando están sometidos a una o varias fuerzas, aplicadas en diferentes puntos.

Para solucionar problemas de equilibrio con fuerzas aplicadas en diferentes puntos, se usan las propiedades del momento de una fuerza.

2.2 Momento de una fuerza.

El momento es un giro que trata de dar un cuerpo, al ser afectado por una fuerza. El momento se puede definir como el producto de la **fuerza por la distancia**, siendo la distancia perpendicular a la fuerza o a la línea de acción de la fuerza.

$$M_A = F * d$$

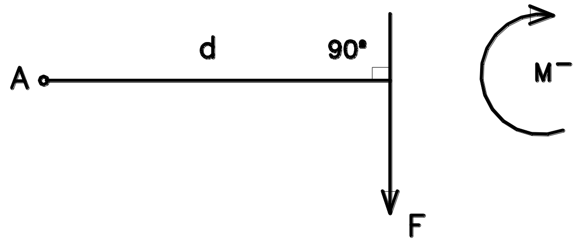


El momento de la fuerza con respecto al punto A es:

$M_A = F * d$

El momento es **positivo** porque gira en sentido contra horario.

El momento de la fuerza con respecto al punto A es:



M_A= -F * d

El momento es **negativo** porque gira en sentido de las manecillas del reloj.
Las unidades del momento de una fuerza en el sistema internacional (S.I) son el N-m.

2.3 Teorema de Varignon.

El teorema de Varignon se usa para encontrar el momento de una fuerza, cuando la distancia no es perpendicular a la fuerza. El teorema de Varignon se expresa de la siguiente forma:

“El momento de una fuerza con respecto a un eje, es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al eje”

$$M^F = Mx + My$$

Las componentes de Mx y My son:

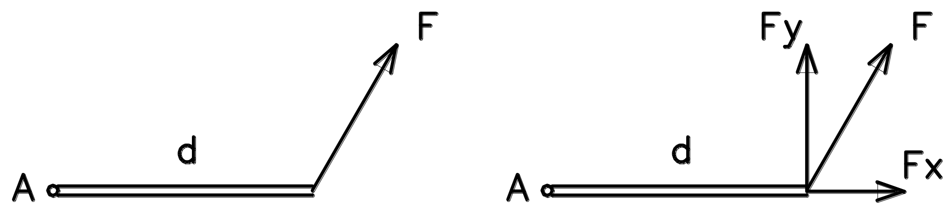
Mx = Fx *. dy

My = Fy * dx

M^F= Fx * dy + Fy * dx

Con esta formula, se puede obtener el momento de una fuerza oblicua con respecto a un eje.

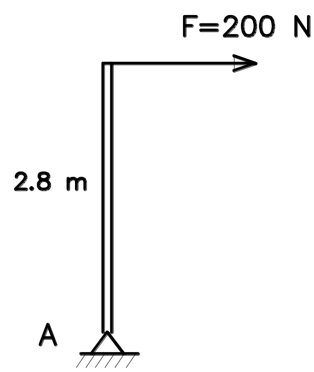
En la siguiente figura se muestra se muestra una fuerza oblicua y las componentes rectangulares usadas para calcular el momento.



En resumen, el teorema de Varignon calcula el momento de una fuerza, utilizando las componentes rectangulares de ella.

Ejemplo 2.1

Una fuerza de 200 N se aplica de forma perpendicular al extremo de una barra. Calcular el momento de la fuerza con respecto al punto A.



Solución:

El momento de la fuerza con respecto al punto A es:

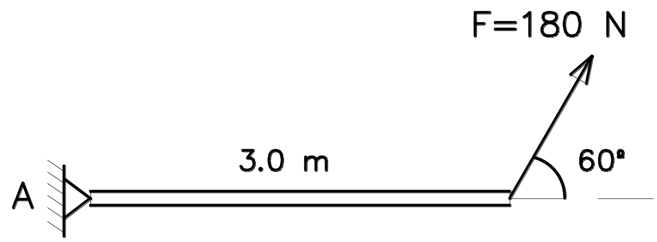
$M_A = F * d$

$M_A = - 200 \text{ N} * 2{,}8 \text{ m}$ ⇨ $\mathbf{M_A = - 560 \text{ N-m}}$

El momento es negativo, porque gira en el mismo sentido a las manecillas del reloj.

Ejemplo 2.2

Una fuerza de 180 N se aplica al extremo de una barra, con un ángulo de inclinación de 60º, según se indica en la figura. Calcular el momento de la fuerza con respecto al punto A.

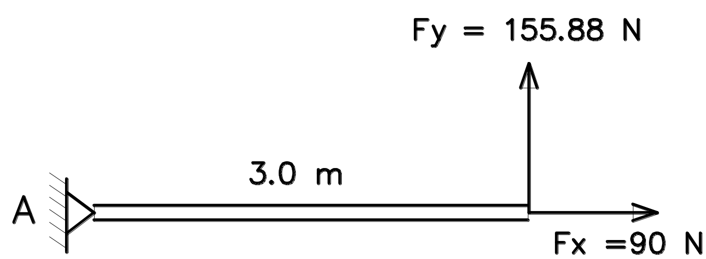


Solución:

Para calcular el momento se utiliza el teorema de **Varignon.** La fuerza oblicua se descompone en sus componentes rectangulares.

F_x= 180 cos 60º = 90 N

F_y= 180 sen 60º = 155,88 N



El momento es:

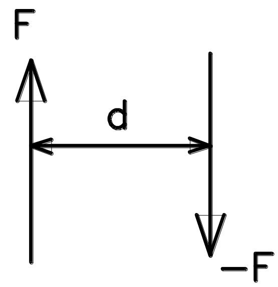
M_A= Fx * dy + Fy * dx

M_A= 90 N (0) + 155,88 N (3,0 m)

M_A= 0 + 467,65 N-m ⇨ **M_A= 467,65 N-m** (Positivo antihorario)

2.4 Par de fuerzas.

Un **par** se define como dos fuerzas, iguales en magnitud, de sentidos opuestos, con líneas de acción paralelas, y separadas por cierta distancia.



La intensidad de un par de fuerzas, es una medida de su tendencia a girar y se define como:

$$M = F * d$$

Donde ***d*** es la distancia perpendicular entre las fuerzas.

El par y el momento tienen la misma tendencia a girar, pero conceptualmente son diferentes.

Los signos del momento producido por el par, se pueden deducir de la siguiente gráfica.

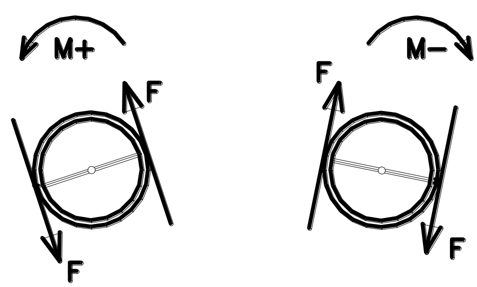


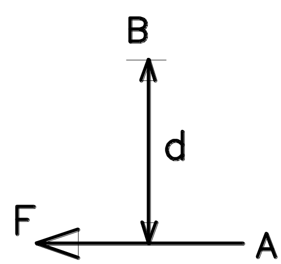
Figura a Figura b

La figura anterior se asemeja al volante de un vehículo, el giro determina el signo del momento. Si el vehículo gira en el sentido de la figura a, el momento es positivo; si el vehículo gira en el otro sentido, el momento es negativo.

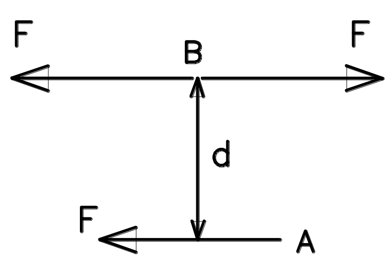
2.5 Traslado de una fuerza.

En algunas estructuras se debe trasladar una fuerza para un lugar diferente a aquel en donde tiene su punto de aplicación. Para realizar este traslado se aprovechan las propiedades del par; el nuevo sistema de fuerzas debe ser equivalente a la fuerza original.

La forma de trasladar una fuerza se indica en las siguientes figuras:



En la figura anterior se quiere trasladar la fuerza aplicada en **A,** por una fuerza aplicada en **B.** Para ello se colocan dos fuerzas en el punto **B,** estas fuerzas deben ser iguales y opuestas para no afectar las condiciones de equilibrio.



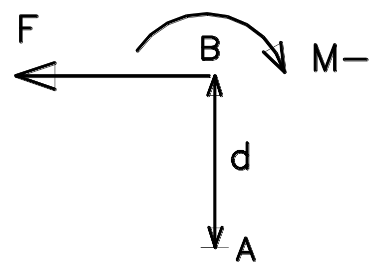
En la figura anterior se puede observar que las dos fuerzas con sentido contrario forman un par, cuya magnitud es igual a la fuerza por la distancia.

El par formado es similar a un momento o un torque. La ecuación para calcular el valor es similar a la ecuación de momento:

Momento= Fuerza por distancia

M= F * d

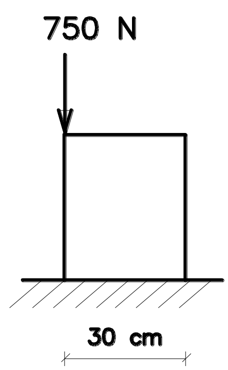
El resultado de trasladar una fuerza para otro punto, es una fuerza en el nuevo punto y un momento.



El momento compensa el cambio de la fuerza y proporciona equilibrio al nuevo sistema.

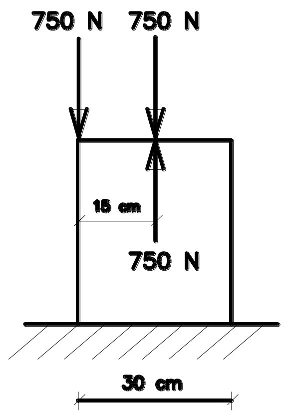
Ejemplo 2.3

Una fuerza de 750 N se aplica sobre la arista de una columna de 30 cm de ancho. Trasladar la fuerza para el centro de la sección transversal.

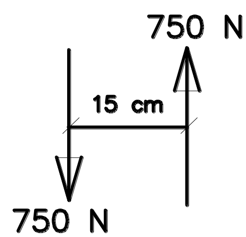


Solución:

Se coloca la fuerza en el centro de la sección. Para no cambiar las condiciones de equilibrio, se le coloca una fuerza igual pero de sentido contrario, de forma que anule la nueva fuerza.

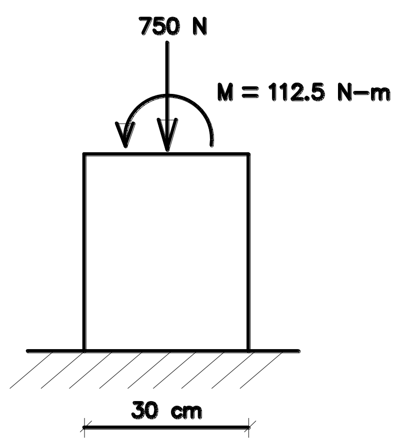


Las dos fuerzas que tienen dirección contraria forman un par, el cual se reemplaza por un momento, el valor del momento es:



M= 750 N x 0,15 m = 112,5 N-m (Positivo antihorario)

El nuevo sistema queda así:



Capítulo 3
Centroide y centro de gravedad

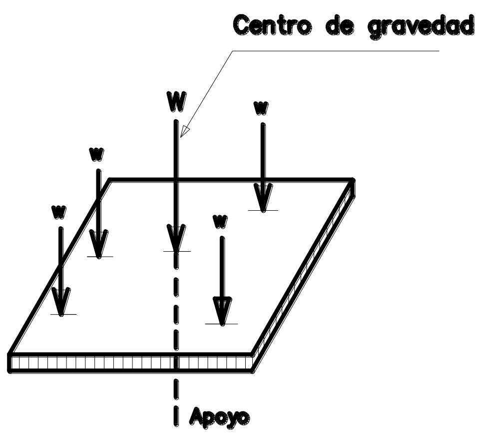
3.1 Introducción.

El centroide de un área plana es el punto donde se debe colocar un apoyo único, para que el cuerpo conserve su equilibrio. En placas o sólidos el punto se denomina **centro de gravedad;** en figuras planas, el punto se denomina **centroide.**

3.2 Centros de gravedad.

El **centro de gravedad** es el punto en el cual se localiza la fuerza resultante del peso de un sólido.

Todo el cuerpo está constituido por una infinidad de partes pequeñas, llamadas partículas; si se da por supuesto que todas las partículas que integran un cuerpo tienen igual masa, todos los pesos serán iguales.



El peso resultante pasa a través de un punto llamado **centro de gravedad.**

El centro de gravedad se describe como el punto donde colocado un apoyo, se equilibra el cuerpo sin ladearse, es decir, la resultante coincide con la reacción en el apoyo.

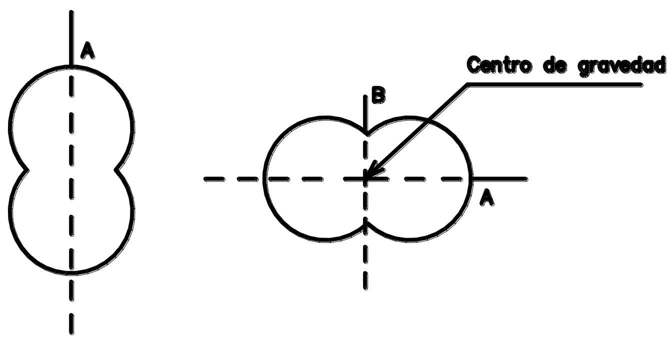
3.2.1 Determinación del centro de gravedad.

En muchos problemas de las estructuras, se necesita determinar el centro de gravedad de placas o sólidos, para ello se pueden presentar dos casos:

a) Que el cuerpo sea irregular.
b) Que el cuerpo sea regular o compuesto por varias figuras regulares.

a) Que el cuerpo sea irregular: Se suspende el cuerpo por un punto **A** y cuando esté en reposo, el centro de gravedad se encuentra en la vertical que pasa por **A**. Se suspende luego el cuerpo por otro punto **B** y cuando esté en reposo, el centro de gravedad se encuentra en la vertical que pasa por **B**.

El centro de gravedad es el punto común a las verticales **A** y **B**.



b) Que el cuerpo sea regular o compuesto: se supone que el cuerpo está dividido en varias partículas de igual peso **w.** El peso total de la placa W, es la suma de los pesos de los elementos:

$W = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + w_n \quad \Rightarrow \quad W = \Sigma\, w$

El momento del peso con respecto a un eje es igual a la suma de los momentos de las partículas:

$W\,\overline{X} = w_1 * x_1 + w_2 * x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Sigma\, w * x$

$W\,\overline{Y} = w_1 * y_1 + w_2 * y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Sigma\, w * y$

3.3 Centroide de un área plana.

Si en una placa el espesor y la densidad son iguales, las formulas para calcular el centroide se pueden simplificar. El peso se reemplaza por el área y las formulas resultantes son:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma A * X}{\Sigma A} \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma A * Y}{\Sigma A}$$

El punto definido por las coordenadas X y Y se denomina el **centroide del área**.

Los ejes coordenados que pasan por ese punto se denominan **ejes centroidales.**

Para calcular el centroide de un área considerada, se debe tener en cuenta las siguientes consideraciones:

Cuando se presenta un vacio en la figura, éste se debe restar en las formulas anteriores.

Cuando la figura es irregular, el centroide puede quedar por fuera del área considerada.

Cuando la figura es simétrica, el centroide debe quedar en el centro del área considerada.

En la siguiente tabla se muestran los centroides de las principales figuras geométricas simples.

Tabla 3.1 Centroide de figuras planas.

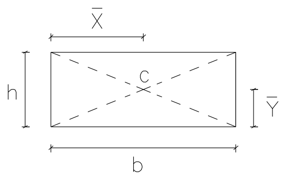
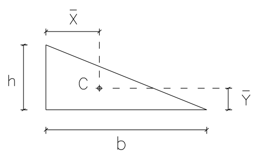
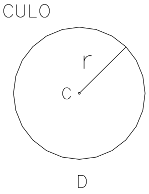
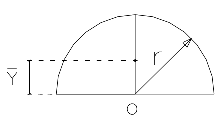
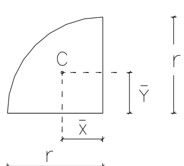
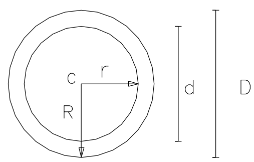
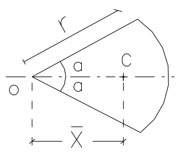
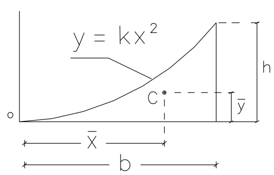
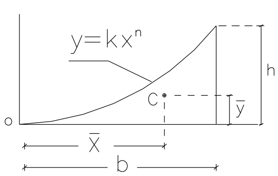
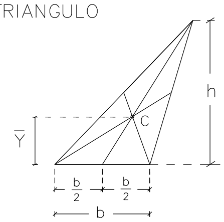
FORMA	CENTROIDE	AREA
CUADRADO, RECTANGULO. 	$\bar{X} = b/2$ $\bar{Y} = h/2$	$A = b \times h$
TRIANGULO RECTANGULO. 	$\bar{X} = b/3$ $\bar{Y} = h/3$	$A = \frac{b \times h}{2}$
CIRCULO 	$\bar{X} =$ En el centro $\bar{Y} =$ En el centro	$A = \pi \times r^2$ $A = \frac{\pi \times D^2}{4}$
SEMICIRCULO 	$\bar{Y} = \frac{4 \times r}{3 \times \pi}$	$A = \frac{\pi \times r^2}{2}$ $A = \frac{\pi \times D^2}{8}$
CUARTO DE CIRCULO. 	$\bar{X} = \frac{4 \times r}{3 \times \pi}$ $\bar{Y} = \frac{4 \times r}{3 \times \pi}$	$A = \frac{\pi \times r^2}{4}$ $A = \frac{\pi \times D^2}{16}$

Tabla 3.1 Continuación. Centroide de figuras planas.

FORMA	CENTROIDE	AREA
CORONA 	$\bar{X}=$ En el centro $\bar{Y}=$ En el centro	$A=\pi\,(R^2-r^2)$ $A=\dfrac{\pi\,(D^2-d^2)}{4}$
SECTOR CIRCULAR 	$\bar{X}=\dfrac{2\ r\ \text{sen}\ a}{3\ a}$ $\bar{Y}=0$	$A=a\ r^2$
ENJUTA PARABOLICA 	$\bar{X}=\dfrac{3\ b}{4}$ $\bar{Y}=\dfrac{3\ h}{10}$	$A=\dfrac{b\ x\ h}{3}$
ENJUTA GENERAL 	$\bar{X}=\dfrac{n+1}{n+2}\ b$ $\bar{Y}=\dfrac{n+1}{4n+2}\ b$	$A=\dfrac{b\ x\ h}{n+1}$
TRIANGULO 	$\bar{X}=$ En la interseccion de las medianas. $\bar{Y}=\dfrac{h}{3}$	$A=\dfrac{b\ x\ h}{2}$

3.4 Centroide de un área compuesta.

Si se desea encontrar el centroide de un área compuesta por varias figuras conocidas, se procede de la siguiente forma:

a) Se divide la figura en varias figuras conocidas, a cada una de las cuales se les pueda determinar el centroide.

b) Se escogen ejes de referencia horizontal y vertical, a partir de los cuales se hacen las medidas.

c) Se determina el centroide aplicando las ecuaciones para cada una de las figuras conocidas.

Si en la figura existe un **vacío**, este se debe restar del área compuesta, tanto en el numerador como en el denominador.

Es muy importante elegir un eje de referencia horizontal pasando por la parte inferior de la figura, y el eje de referencia vertical pasando por el extremo izquierdo de la figura, de esta forma no hay valores negativos de distancias.

Si el área tiene un eje de simetría, el centroide quedará sobre ese eje.

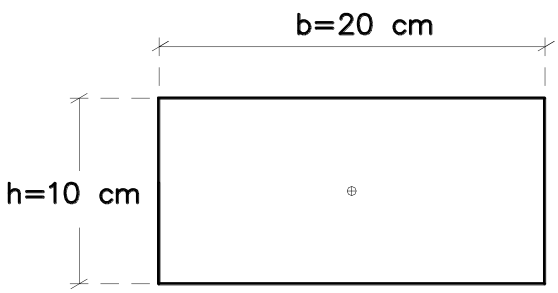
Si se desea encontrar el centroide de una figura geométrica simple, simplemente se mira en la tabla 3.1 y allí se encuentra la formula para cada centroide.

El centroide de una figura plana tiene su importancia en las estructuras, debido a que se considera que por allí pasa el eje neutro.

El eje neutro es aquel punto de una estructura que no está sometido a esfuerzos de tracción ni de compresión.

Ejemplo 3.1

Localizar el centroide de la figura plana que se indica en la figura. Trazar los ejes centroidales.



Solución:

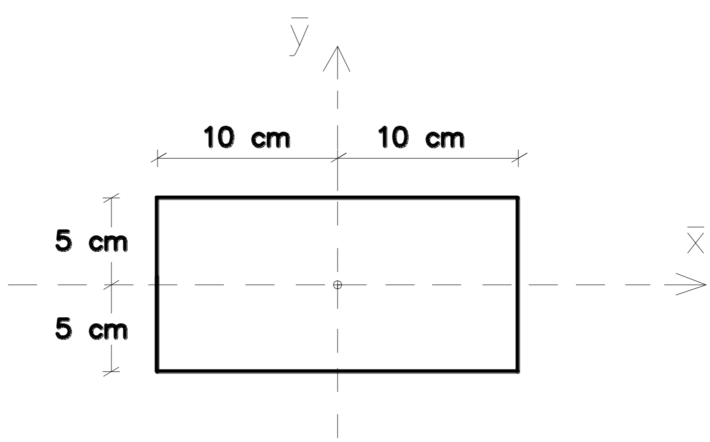
Como la figura es simple, el centro de gravedad se encuentra en la tabla 3.1.

Para un rectángulo se tiene:

$\overline{X}$= b/2 ⇨ $\overline{X}$= 20 cm / 2 ⇨ $\overline{X}$= 10,0 cm

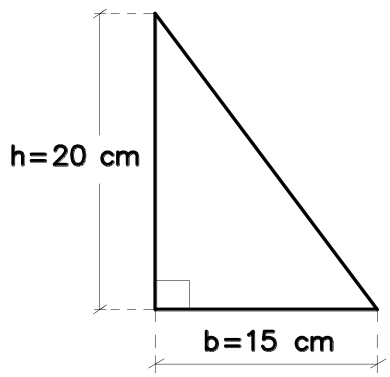
$\overline{Y}$= h /2 ⇨ $\overline{Y}$ =10 cm / 2 ⇨ $\overline{Y}$= 5,0 cm

Por esos puntos se traza los ejes centroidales.



Ejemplo 3.2

Localizar el centroide de la figura plana que se indica en la figura. Trazar los ejes centroidales.



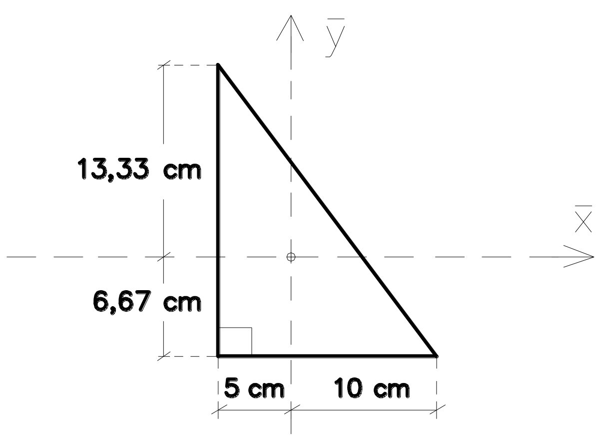
Solución:
Como la figura es simple, el centro de gravedad se encuentra en la tabla 3.1.

Para un triángulo rectángulo se tiene:

$\overline{X}$= b/3 ⇨ $\overline{X}$= 15 cm / 3 ⇨ $\overline{X}$= 5 cm

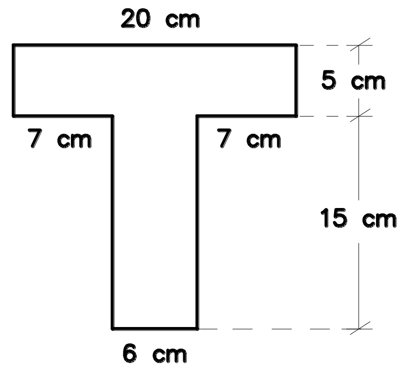
$\overline{Y}$= h/3 ⇨ $\overline{Y}$= 20 cm/3 ⇨ $\overline{Y}$= 6,67 cm

Por esos puntos se traza los ejes centroidales, los cuales se miden a partir del ángulo recto.

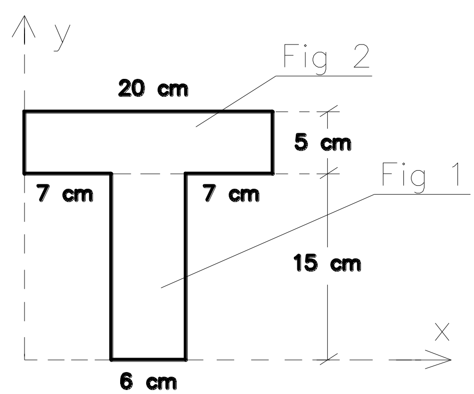


Ejemplo 3.3

Determinar el centroide de la figura compuesta que se indica en la figura. Localizar los ejes centroidales.



Solución:
Se escogen los ejes coordenados y se divide el área total en dos figuras conocidas.



Como la figura es simétrica con respecto al eje X, el centroide se localiza en la mitad de la distancia X, es decir: X centroidal= 10 cm.

El centroide en Y se localiza con la siguiente ecuación:

$$\bar{Y} = \frac{\sum A * y}{\sum A} = \frac{A1 * y1 + A2 * y2}{A1 + A2}$$

Los datos del rectángulo 1 son:

El área del rectángulo 1 es:

$A_1 = b * h = 6\ cm * 15\ cm = 90\ cm^2$

La distancia Y1 se toma desde el eje de referencia, hasta el centroide de la figura 1.

$Y_1 = 15\ cm / 2 = 7{,}5\ cm$

Los datos del rectángulo 2 son:

El área del rectángulo 2 es:

$A_2 = b * h = 20\ cm * 5\ cm = 100\ cm^2$

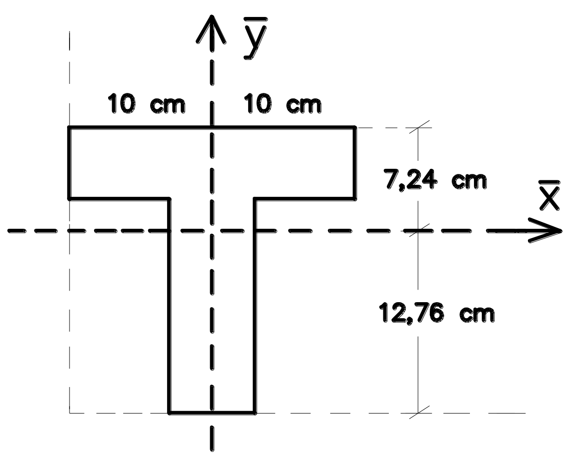
La distancia Y2 se toma desde el eje de referencia, hasta el centroide de la figura 2.

$Y_2 = 15\ cm + 5\ cm / 2 = 15\ cm + 2{,}5\ cm = 17{,}5\ cm$

Reemplazando en la ecuación del centroide, se tiene:

$$\bar{Y} = \frac{A_1 * y_1 + A_2 * y_2}{A_1 + A_2} = \frac{90\ cm^2 * 7{,}5\ cm + 100\ cm^2 * 17{,}5\ cm}{90\ cm^2 + 100\ cm^2} = 12{,}76\ cm$$

Los ejes centroidales se indican en la siguiente figura:



Capítulo 4
Momento de inercia

4.1 Introducción

El momento de inercia (I) es una medida de la resistencia que tiene un elemento estructural, de cambiar su movimiento de rotación en torno de un eje dado.

Para calcular el momento de inercia de un área, se debe tener en cuenta el eje de referencia. En estructuras se utiliza con mayor frecuencia el eje X como eje de referencia.

4.2 Momento de Inercia de áreas simples.

Para calcular el momento de inercia de áreas simples se usa la formula básica para cada figura, se debe tener en cuenta el eje de referencia considerado. Las formulas básicas suponen el eje de referencia en el centroide.

Si se quiere encontrar el momento de inercia con respecto a otro eje cualquiera, se debe utilizar el teorema de los ejes paralelos.

Las unidades del momento de inercia son el cm^4 , m^4 , etc.

Para calcular el momento de inercia de un área compuesta por varias áreas simples, se usa el teorema de los ejes paralelos.

En la tabla siguiente se muestran las figuras geométricas más usuales, y la ecuación del momento de inercia con respecto al eje centroidal.

Tabla 4.1 Momento de Inercia de figuras conocidas

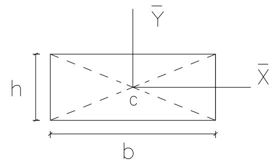
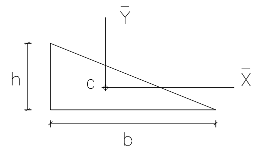
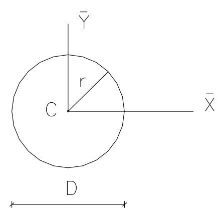
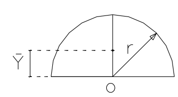
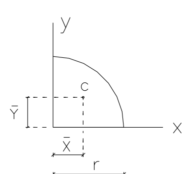
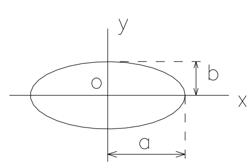
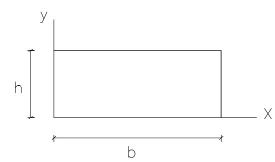
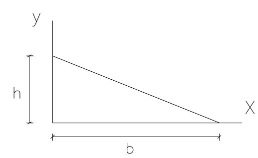
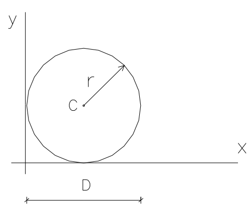
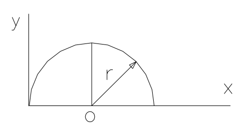
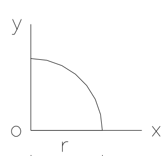
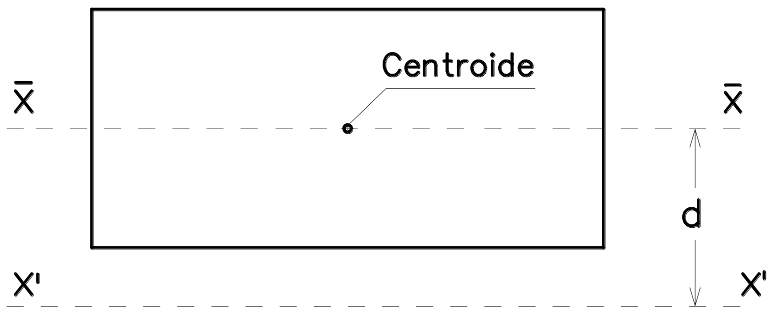
SECCION	FORMA	MOMENTO DE INERCIA
RECTANGULO		$\bar{I}x = \frac{b\ h^3}{12}$ $\bar{I}y = \frac{b^3\ h}{12}$
TRIANGULO		$\bar{I}x = \frac{b\ h^3}{36}$ $\bar{I}y = \frac{b^3\ h}{36}$
CIRCULO		$\bar{I}x = \frac{\pi r^4}{4}$ $\bar{I}y = \frac{\pi r^4}{4}$
SEMICIRCULO		$\bar{I}x = 0.11\ r^4$ $\bar{I}y = 0.11\ r^4$
CUARTO DE CIRCULO		$\bar{I}x = 0.055\ r^4$ $\bar{I}y = 0.055\ r^4$
ELIPSE		$\bar{I}x = \frac{\pi\ a\ b^3}{4}$ $\bar{I}y = \frac{\pi\ a^3\ b}{4}$

Tabla 4.1 Continuación. Momento de Inercia de figuras conocidas

SECCION	FORMA	MOMENTO DE INERCIA
RECTANGULO		$Ix = \frac{b\ h^3}{3}$ $Iy = \frac{b^3\ h}{3}$
TRIANGULO		$Ix = \frac{b\ h^3}{12}$ $Iy = \frac{b^3\ h}{12}$
CIRCULO		Ix= Usar el teorema de los ejes paralelos Iy= Usar el teorema de los ejes paralelos
SEMICIRCULO		$Ix = \frac{\pi r^4}{8}$ Iy= Usar el teorema de los ejes paralelos
CUARTO DE CIRCULO		$Ix = \frac{\pi r^4}{16}$ $Iy = \frac{\pi r^4}{16}$

4.3 Teorema de los ejes paralelos.

El teorema de los ejes paralelos o de steiner, se usa para calcular el momento de inercia con respecto a un eje distinto al que pasa por su centroide.



Para calcular el momento de inercia se utiliza el siguiente teorema:

“El momento de inercia de una superficie plana, con relación a un eje cualquiera, es igual a su momento de inercia propio, aumentado con el producto de su superficie por el cuadrado de la distancia que separa el centro de gravedad del eje considerado”.

$$I_{x'} = I_x + A * d^2$$

Donde,

$I_{x'}$ = Momento de inercia con respecto al eje X\`- X\`

I_x = Momento de inercia del área con respecto a su propio eje centroidal.

A = Área de la sección.

d = Distancia entre el eje X\`-X\` y el eje X-X.

4.4 Momento de inercia de áreas compuestas.

Para un área que está formada por varias áreas simples, el momento de inercia del área compuesta, es la suma de los momentos de inercia de cada área individual, con respecto al eje deseado.

Si la figura compuesta tiene un **vacío**, el momento de inercia del vacío se descuenta de la suma total.
Los pasos para determinar el momento de inercia centroidal de un área compuesta, son:

a) Se descompone el área en formas geométricas simples.
b) Se escogen los ejes de referencia.
c) Se encuentra el centroide de la figura.
d) Se trazan los ejes centroidales.
e) Se aplica el teorema de los ejes paralelos.

4.5 Radio de giro.

El radio de giro está ligado a todos los problemas de **pandeo** ó flexión lateral de las columnas. A mayor radio de giro, más inestable es la estructura; por lo tanto, en el diseño de un elemento estructural se debe tener en cuenta el menor radio de giro posible.

El radio de giro está dado por la ecuación:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Donde,

r = radio de giro
I = momento de inercia
A = área de la sección.

El radio de giro con respecto a los ejes X y Y, se expresa con las siguientes ecuaciones:

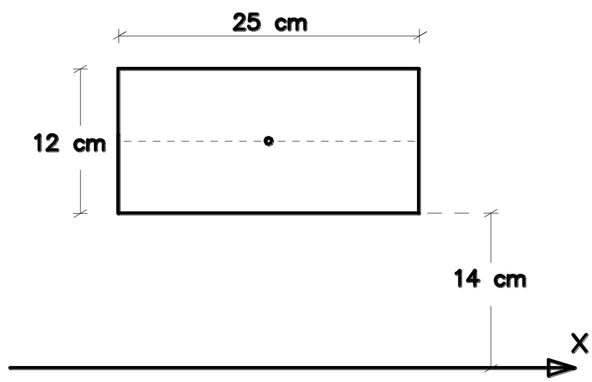
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Donde,

r_x = radio de giro con respecto al eje <u>x</u>
r_y = radio de giro con respecto al eje <u>y</u>
I_x = momento de inercia con respecto al eje <u>x</u>
I_y = momento de inercia con respecto al eje <u>y</u>
A = área de la sección.

Ejemplo 4.1

Determinar el momento de inercia (Ix) de la figura, con respecto al eje x que se indica. Hallar el radio de giro.



Solución:

Para determinar el momento de inercia **Ix** de la figura, se utiliza el teorema de los ejes paralelos.

$Ix = Ix + A\ dy^2$

La distancia **dy** se mide desde el eje x hasta el centroide del rectángulo:

dy = 14 cm + 6 cm = 20 cm

$$Ix = \frac{b * h^3}{12} + A * dy^2$$

$$Ix = \frac{25 * 12^3}{12} + (25 * 12) * 20^2$$

$Ix = 3.600\ cm^4 + 120.000\ cm^4$ $\Rightarrow$ $\mathbf{Ix = 123.600\ cm^4}$

El radio de giro con respecto al eje X es:

$$r_x = \sqrt{\frac{Ix}{A}} = \sqrt{\frac{123600}{300}} = 20,29\ \text{cm}$$

Capítulo 5
Vigas y reacciones en vigas

5.1 Introducción

Una viga es un **elemento horizontal** que se flexiona debido a las cargas que soporta. Las vigas trasladan el peso a los apoyos y estos a su vez, lo trasladan a la cimentación y al suelo de soporte.

Las reacciones son el peso que la viga le traslada a sus apoyos. Para calcular estas reacciones se debe tener en cuenta las condiciones de equilibrio de la viga.

5.2 Equilibrio de vigas.

Una viga está en **equilibrio** si la sumatoria de fuerzas y de momentos es igual a cero, es decir, la viga cumple las condiciones de la estática.

Cuando la viga está en equilibrio se pueden calcular sus reacciones, utilizando las ecuaciones de la estática.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

Para poder utilizar las tres ecuaciones de equilibrio, la viga debe tener solamente tres incógnitas, lo cual se denomina "*Viga Estáticamente Determinada".*

Si la viga tiene más de tres incógnitas, no se puede resolver por medio de la estática, estas vigas se denominan "*Estáticamente Indeterminadas*".

5.3 Clasificación de las vigas.

Las vigas se clasifican debido a los siguientes factores:

5.3.1 Clasificación estática: Las vigas se clasifican en estáticamente determinadas y estáticamente indeterminadas.

a) Vigas estáticamente determinadas: Se dice que una viga es estáticamente determinada, cuando todas sus reacciones se pueden calcular usando las ecuaciones de equilibrio.

$$\Sigma\, Fx = 0 \qquad \Sigma\, Fy = 0 \qquad \Sigma\, M = 0$$

Para cumplir con este requisito, la viga debe tener tres reacciones.

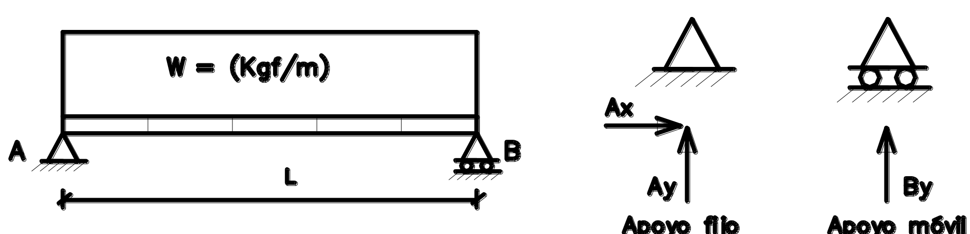
b) Vigas estáticamente indeterminadas: Una viga es estáticamente indeterminada, cuando tiene más de tres reacciones en sus apoyos, es decir, tiene más reacciones que número de ecuaciones. Estas vigas no se pueden resolver por medio de la estática.

5.3.2 Clasificación por sus apoyos: las vigas se clasifican de acuerdo a sus apoyos de la siguiente forma:

a) Vigas simplemente apoyadas: las vigas simplemente apoyadas son aquellas que tienen sus **apoyos libres** de giros, es decir, cuando sus apoyos están sueltos y no ofrecen resistencia al giro.

Las vigas simplemente apoyadas solamente tienen reacciones verticales y horizontales.

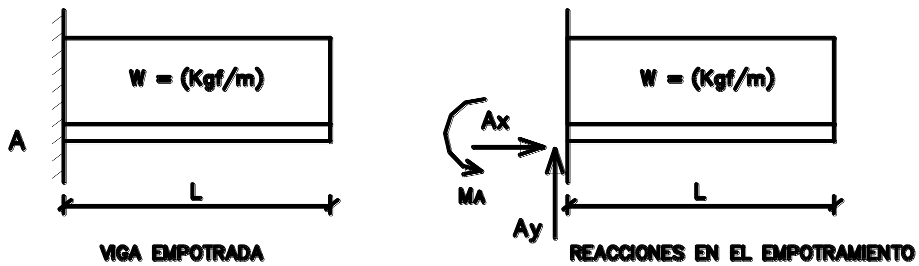
Las vigas simplemente apoyadas se representan con un apoyo fijo y uno móvil. El apoyo fijo tiene dos reacciones desconocidas y el apoyo móvil tiene una sola reacción desconocida.



Viga simplemente apoyada.

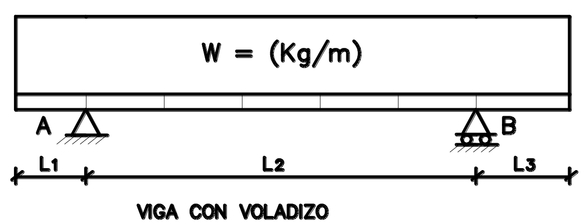
b) Vigas empotradas: llamadas también vigas en voladizo, son aquellas en las cuales un apoyo esta fijo para impedir la rotación.

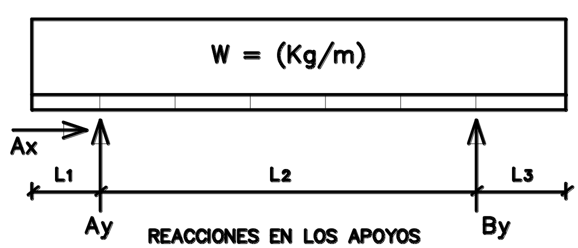
Las vigas empotradas tienen tres reacciones en el apoyo. Las reacciones son horizontal, vertical y un momento en el empotramiento.



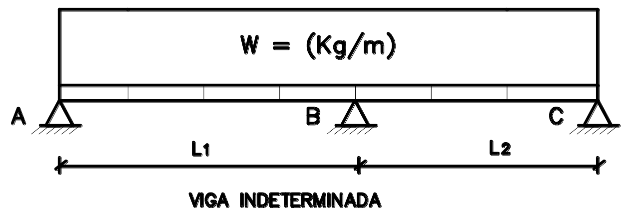
c) Vigas con voladizo: son aquellas vigas en donde uno o sus dos extremos sobresalen del apoyo. Estas vigas se utilizan en construcciones pequeñas, en donde existe un voladizo en el diseño.

Los apoyos de estas vigas son uno fijo y el otro móvil, en el apoyo fijo se presentan dos incógnitas y en el móvil una incógnita.

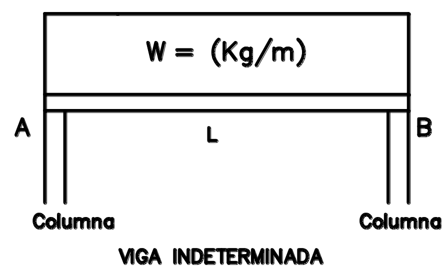


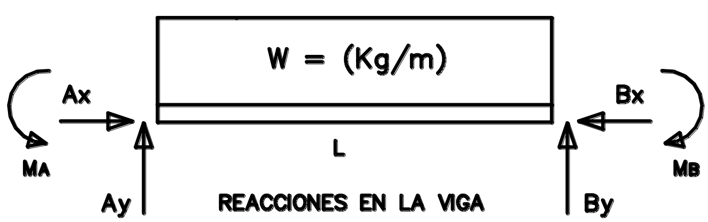


d) Vigas continuas: son las vigas que tienen tres o más apoyos, estas vigas son estáticamente indeterminadas, debido a que tienen más de tres incógnitas.



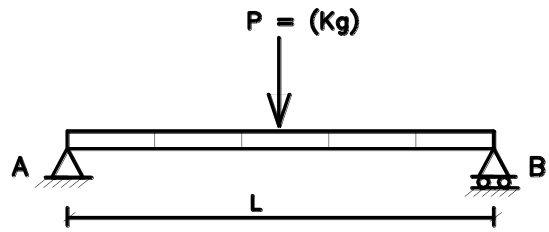
d) Vigas doblemente empotradas: Son las vigas que están apoyadas sobre dos **columnas**, en los apoyos se presenta empotramiento. Estas vigas son estáticamente indeterminadas porque tienen seis incógnitas.





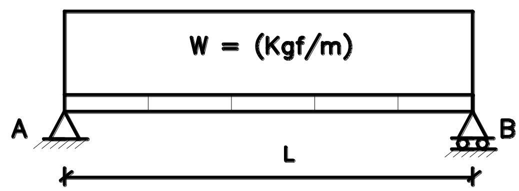
5.3.3 Clasificación por el tipo de carga: las vigas se clasifican de acuerdo a la carga que soportan, de la siguiente manera:

a) Viga con carga concentrada: Es la viga que tiene una carga concentrada sobre un punto, es decir, tiene una carga puntual.



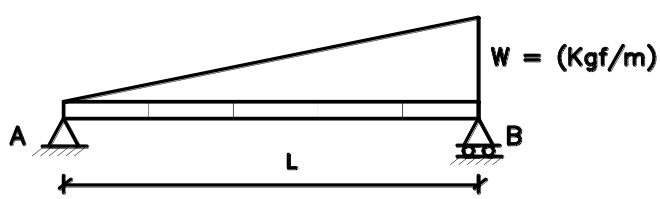
Viga con carga concentrada

b) Viga con carga uniformemente distribuida: Es la viga que tiene una carga igualmente distribuida sobre una parte o sobre toda la longitud de la viga. La carga uniformemente distribuida se dibuja como un **rectángulo**.



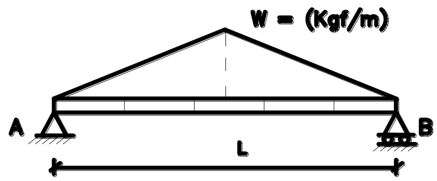
Viga con carga distribuida

c) Viga con carga variable: Es aquella que soporta una carga que varía en intensidad desde un punto a otro. Este tipo de carga se dibuja como un **triángulo** o un **trapecio**.

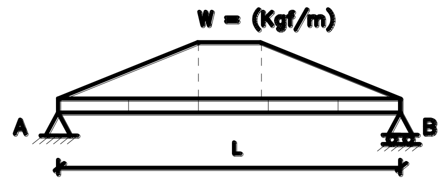


Viga con carga variable

Otras cargas variables:



Viga con carga variable



Viga con carga variable

5.4 Reacciones en vigas.

Las reacciones en los apoyos de una viga, son el resultado de aplicar cargas a la viga. De acuerdo a las leyes de Newton, la reacción es igual a la acción, por lo tanto la *reacción* es igual a la carga que le llega al apoyo.

Para calcular las **reacciones** en una viga se debe hacer el siguiente procedimiento:

a) Se hace el diagrama de cuerpo libre, en el cual se colocan las reacciones y todas las cargas.

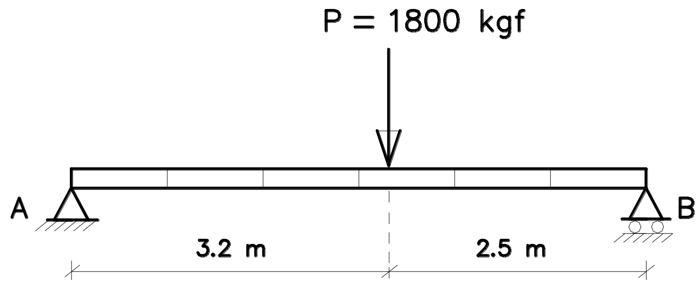
b) Las cargas distribuidas se concentran en su centroide, las cargas concentradas ya tienen su punto de aplicación definido.

c) Se aplican las tres ecuaciones de equilibrio a todas las fuerzas del diagrama de cuerpo libre.

d) Se resuelven las ecuaciones de equilibrio y se encuentra el valor de cada reacción.

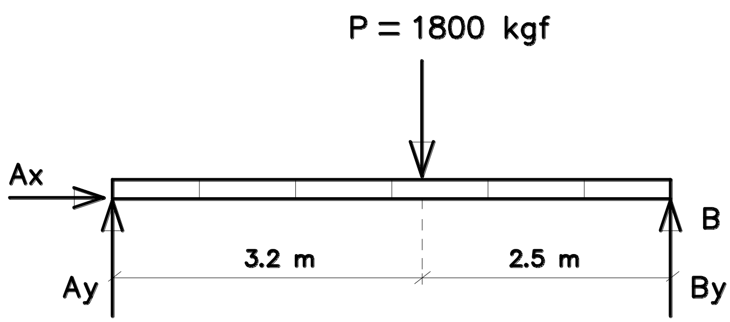
Ejemplo 5.1

En la figura se muestra una viga simplemente apoyada, la cual soporta una carga concentrada de 1800 kgf. Calcular las reacciones en los apoyos.



Solución:

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la siguiente figura:



En el apoyo fijo se presentan dos reacciones y en el móvil se presenta una sola reacción.

Se plantean las tres ecuaciones de equilibrio:

La sumatoria de fuerzas horizontales es:

Σ Fx = 0 $\Rightarrow$ **Ax = 0**

La sumatoria de fuerzas verticales es:

Σ Fy = 0

Ay – 1.800 kgf + By = 0 $\Rightarrow$ Ay + By =1.800 kgf (ecuación 1)

La sumatoria de momentos con respecto al punto A es:

$\Sigma M_A = 0$ (Positivo antihorario)

-1.800 kgf * 3,2 m + By * 5,7 m = 0

-5.760 kgf*m + By * 5,7 m = 0

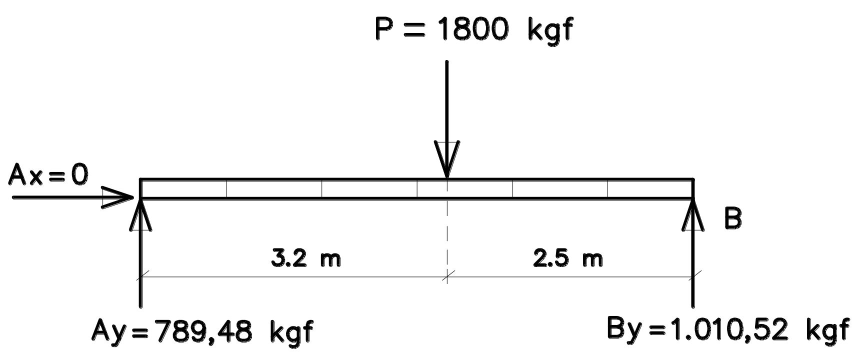
$$By = \frac{5.760 \text{ kgf-m}}{5,7 \text{ m}} \Rightarrow \textbf{By = 1.010,52 kgf}$$

El valor de **By** se reemplaza en la ecuación (1) y se encuentra el valor de Ay.

Ay + By = 1.800 kgf ⇒ Ay = 1.800 kgf – By

Ay = 1.800 kgf – 1.010,52 kgf ⇒ **Ay = 789,48 kgf**

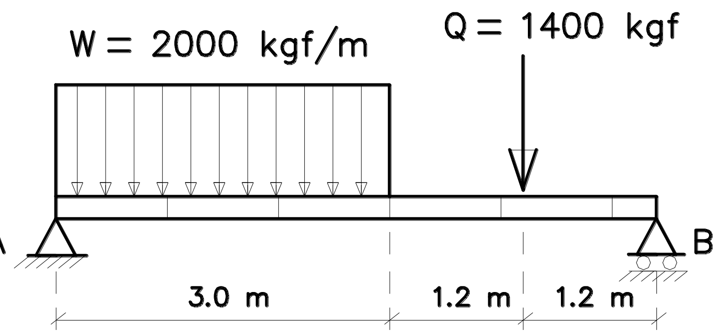
La viga con las reacciones se muestra en la siguiente figura:



Nota: La reacción en el apoyo B es mayor que la reacción en el apoyo A, debido a que la carga *P* está más cerca del apoyo B.

Ejemplo 5.2

En la figura se muestra una viga simplemente apoyada, la cual soporta una carga uniformemente distribuida y una concentrada. Calcular las reacciones en los apoyos.

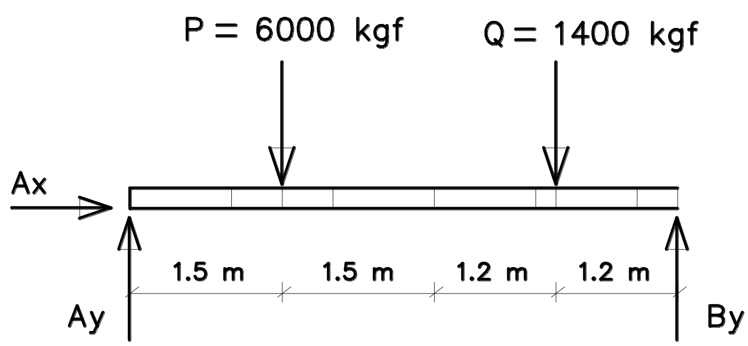


Solución:

La carga distribuida se concentra y se localiza en su centroide. El peso de la carga distribuida es:

P= 2.000 kgf/m * 3,0 m = 6.000 kgf

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la siguiente figura. El centroide de los rectángulos esta localizado en la mitad de su longitud.



En el apoyo fijo se colocan las dos reacciones y en el apoyo móvil se coloca una reacción vertical.

Se plantean las tres ecuaciones de equilibrio:

La sumatoria de fuerzas horizontales es:

$\Sigma F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **Ax = 0**

La sumatoria de fuerzas verticales es:

$\Sigma F_y = 0$

Ay – 6.000 kgf – 1.400 kgf + By = 0 $\Rightarrow$ Ay + By = 7.400 kgf (ecuacion 1)

La sumatoria de momentos con respecto al punto A es:

$\Sigma M_A = 0$ (Positivo antihorario)

-6.000 kgf * 1,5 m – 1.400 kgf * 4,2 m + By (5,4 m) = 0

-9.000 kgf*m – 5.880 kgf*m + By (5,4 m) = 0

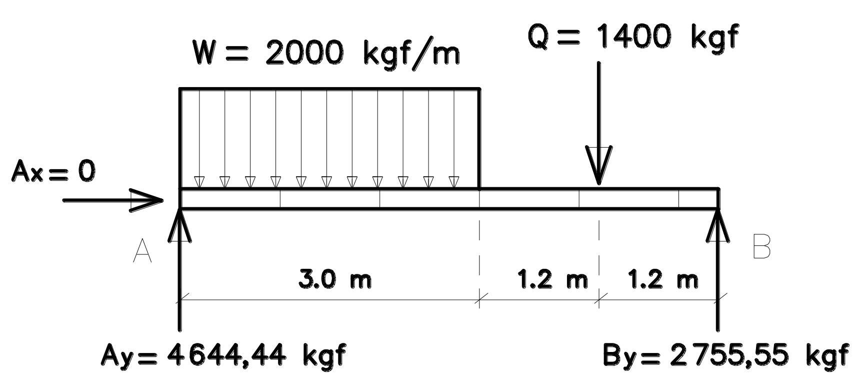
$$By = \frac{14.880 \text{ kgf*m}}{5{,}4 \text{ m}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{By = 2.755{,}55\ kgf}$$

Este valor de By se reemplaza en la ecuación (1) y se encuentra el valor de Ay.

Ay + By = 7.400 kgf $\Rightarrow$ Ay = 7.400 kgf – By

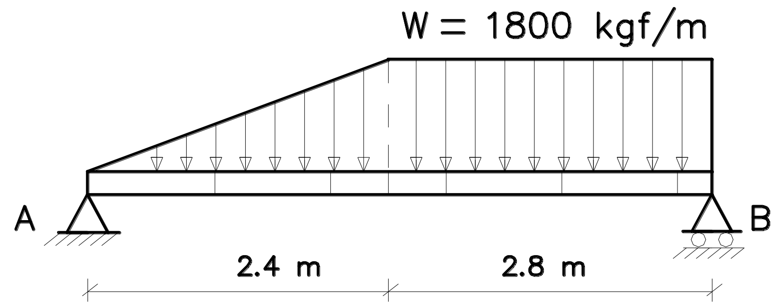
Ay = 7.400 kgf – 2.755,55 kgf $\Rightarrow$ **Ay = 4.644,44 kgf**

La viga con las reacciones se muestra en la siguiente figura:



Ejemplo 5.3

En la figura se muestra una viga simplemente apoyada, la cual soporta las cargas que se indican en la figura. Calcular las reacciones en los apoyos.

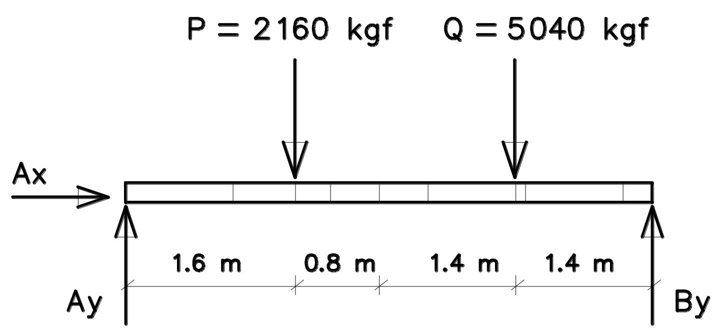


Solución:

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la siguiente figura, las cargas distribuidas se concentran y se localizan en su centroide. El peso de las cargas distribuidas es:

$$P_1 = \frac{1.800 \text{ kgf/m} * 2,4 \text{ m}}{2} = 2.160 \text{ kgf}$$

P_2 = 1.800 kgf/m * 2,8 m = 5.040 kgf



En el apoyo fijo se colocan las dos reacciones y en el apoyo móvil se coloca una reacción vertical.

Se plantean las tres ecuaciones de equilibrio:

La sumatoria de fuerzas horizontales es:

Σ Fx = 0 $\Rightarrow$ **Ax = 0**

La sumatoria de fuerzas verticales es:

Σ Fy = 0

Ay – 2.160 kgf – 5.040 kgf + By = 0 $\Rightarrow$ Ay + By = 7.200 kgf (1)

La sumatoria de momentos con respecto al punto A es:

Σ M_A = 0 (Positivo antihorario)

-2.160 kgf * 1,6 m – 5.040 kgf * 3,8 m + By (5,2 m) = 0

-3.456 kgf*m – 19.152 kgf*m + By (5,2 m) = 0

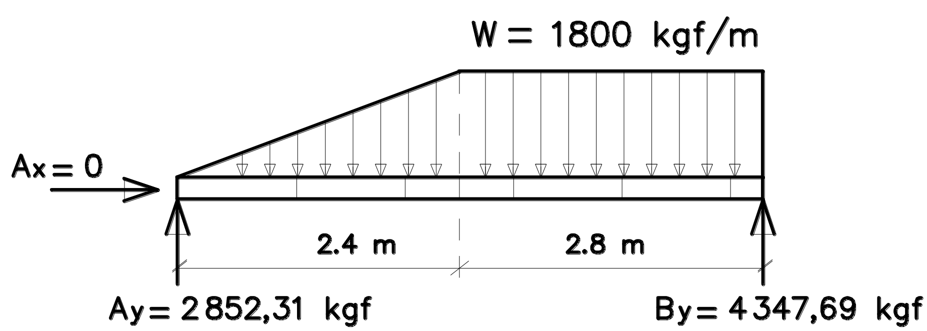
$$By = \frac{22.608 \text{ kgf*m}}{5,2 \text{ m}}$$ $\Rightarrow$ **By = 4.347,69 kgf**

El valor de By se reemplaza en la ecuación (1) y se encuentra el valor de Ay.

Ay + By = 7.200 kgf $\Rightarrow$ Ay = 7.200 kgf – By

Ay = 7.200 kg – 4.347,69 kgf $\Rightarrow$ **Ay = 2.852,31 kgf**

La viga con las reacciones se muestra en la siguiente figura:



BIBLIOGRAFIA

Beer y Johnston. Estática. Cuarta edición. Mc Graw Hill

Cutnell John. Física. Editorial Limusa.

Gutiérrez Aranzeta, Carlos. Mecánica y calor. Editorial Limusa.

Sears y Zemansky. Física Universitaria. Editorial Harla. 6 Edición.

Serway Raymond A. Física. Mac Graw - Hill. Tomo I. 4ª Edición.